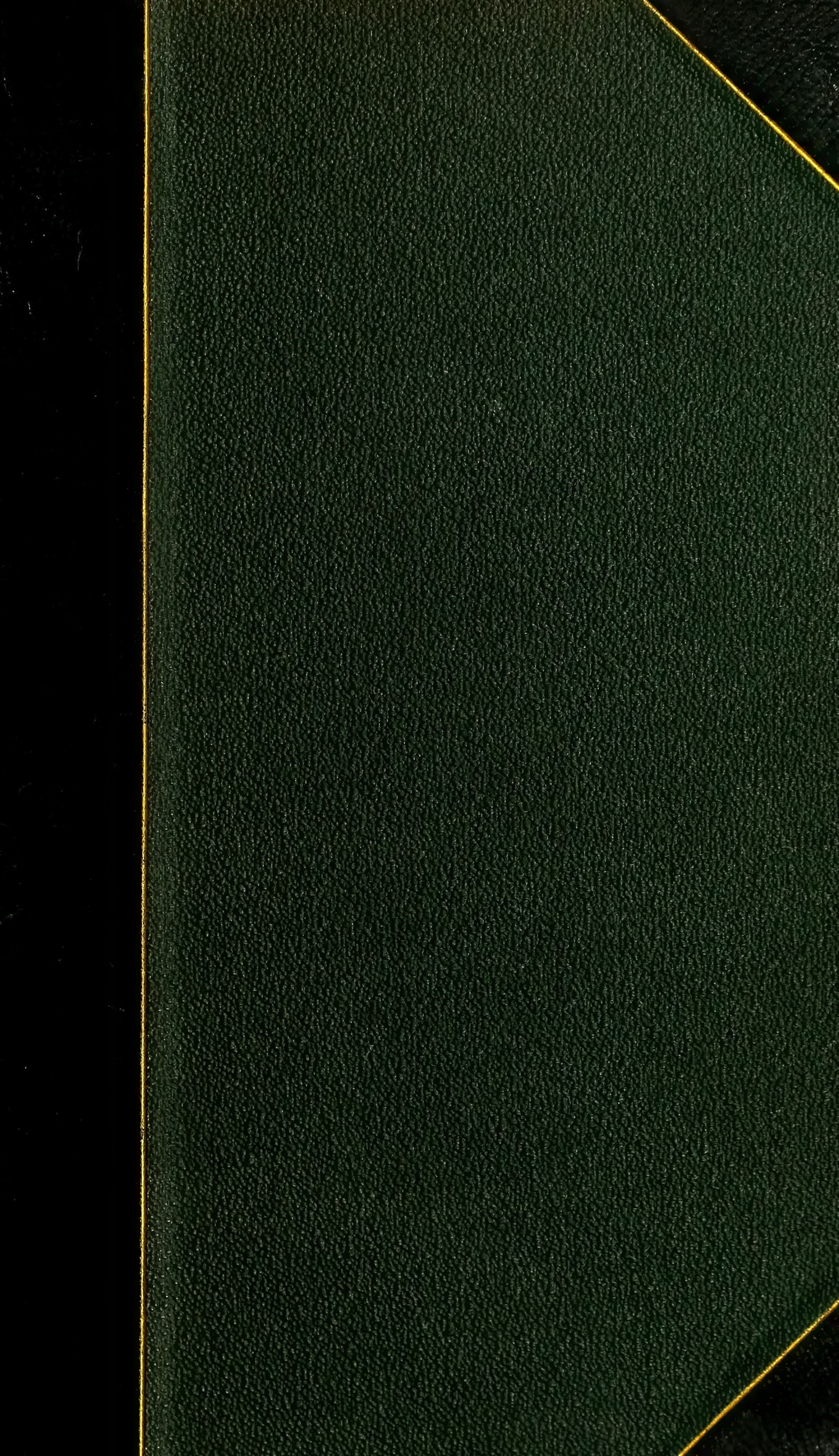


(Suite)

Etude expérimentale sur les propriétés attribuées à la tuberculine de M. Koch, faite au laboratoire de médecine expérimentale et comparée de la Faculté de Médecine, par M. le professeur ARLOING, M. le Dr RODET, agrégé, et M. le Dr COURMONT, agrégé, avec 4 planches en couleurs. *(Fasc. 11)* . . . . **10** fr.

Histologie comparée des Ebénacées dans ses rapports avec la Morphologie et l'histoire généalogique de ces plantes, par Paul PARMENTIER, professeur de l'Université, avec 4 planches hors texte. *(Fasc. 12)* . . . . **4** fr.

Recherches sur la production et la localisation du Tanin chez les fruits comestibles fournis par la famille des Pomacées, par Mlle A. MAYOUX, élève de la Faculté des Sciences, 2 planches hors texte. *(Fasc. 13)* . . . . **3** fr.

Etude sur le Bilharzia hæmatobia et la Bilharziose, par M. LORTET, doyen de la Faculté de médecine, et M. VIALLETON, professeur à la Faculté de médecine de l'Université de Montpellier, 8 planches hors texte et 8 figures dans le texte. *(Fasc. 16)* . . . . **10** fr.

Monographie de la Faune lacustre de l'Eocène moyen, par Frédéric ROMAN, docteur ès sciences, préparat. de géologie à l'Université de Lyon, avec 3 fig. et 3 pl. hors texte. (I, *Fasc. 1er*) . **5** fr.

Etudes sur le Polymorphisme des Champignons, influence du milieu, par Jean BEAUVERIE, docteur ès sciences, prépar. de botan. Faculté des Sciences de Lyon, avec 75 gr. dans le texte. (I, *Fasc. 3*). **7** fr. **50**

L'Homme quaternaire dans le Bassin du Rhône, *Etude géologique et anthropologique*, par Ernest CHANTRE, docteur ès sciences, sous-directeur du Muséum, avec 74 figures dans le texte (I, *Fasc. 4*) . . . . **6** fr.

La Botanique à Lyon avant la Révolution et l'histoire du Jardin botanique municipal de cette ville, par M. GÉRARD, professeur à la Faculté des Sciences, avec 9 fig. dans le texte et 1 pl. hors texte. *(Fasc. 23)* . . . . **3** fr. **50**

Physiologie comparée de la Marmotte, par le Dr Raphaël DUBOIS, professeur à la Faculté des Sciences, avec 119 figures et 125 planches hors texte. *(Fasc. 25)*. . . . . **15** fr.

Etudes sur les terrains tertiaires du Dauphiné, de la Savoie, et de la Suisse occidentale, par H. DOUXAMI, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Lyon, avec 6 planches hors texte et 31 figures. *(Fasc. 27)* . . . . **6** fr.

Recherches physiologiques sur l'appareil respiratoire des oiseaux, par J.-M. SOUM, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Bordeaux, avec 40 figures dans le texte. *(Fasc. 28)* . . . . . **3** fr. **50**

Résultats scientifiques de la campagne du « Caudan » dans le golfe de Gascogne (août-septembre 1895), par R. KŒHLER, professeur de zoologie à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 26)*.
Fascicule I. 1 vol. in-8° avec 6 pl. . . . . **6** fr.
Fascicule II. 1 vol. in-8° avec 11 pl. . . 6
Fascicule III. 1 vol. in-8° avec 21 pl. . . . 20

Anatomie pathologique du système lymphatique dans la sphère des néoplasmes malins, par le Dr C. REGAUD, chef des travaux, et le Dr F. BARJON, préparateur d'anatomie générale et d'histologie à la Faculté de médecine (Mémoire couronné par l'Académie de médecine), avec 4 pl. [hors] texte. *(Fasc. 33)* 5

Recherches stratigraphiques et paléontologiques dans le Bas-Languedoc, par Frédéric ROMAN, docteur ès sciences, préparateur de géologie [à la] Faculté, avec 40 figures dans le texte et 9 [plan]ches hors texte. *(Fasc. 34)*. . . . . . .

Étude du champ électrique de l'atmosphère, [par] Georges LE CADET, docteur ès sciences, assi[stant] à l'Observatoire de Lyon, 3 fig. et 10 pl. da[ns le] texte. *(Fasc. 35)* . . . .

Les formes épitoques et l'Évolution des Cirratu[liens] par Maurice CAULLERY, maître de confér. [à la] Faculté des Sciences, et Félix MESNIL, ch[ef de] Laboratoire à l'Institut Pasteur, 6 pl. hors t[exte]. *(Fasc. 39)*. . . . . **7** fr. **50**

Etude géologique et paléontologique du Carbo[nifère] inférieur du Mâconnais, par A. VAFFIER, do[cteur] en médecine et docteur ès sciences, avec 11 fi[gures] et 12 planches hors texte. (I, *Fasc. 7*). .

Contributions à l'Embryologie des Nématodes [par] A. CONTE, docteur ès sciences, prépar. de [zoo]logie à l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 8*).

Contributions à l'étude des larves et des méta[mor]phoses des diptères, par C. VANEY, docte[ur ès] sciences, agrégé des sciences naturelles, ch[ef des] travaux de Zoologie à l'Université de [Lyon]. (I, *Fasc. 9*) . . . .

Contribution à l'étude de la classe des Nymphé[acées] par J.-B.-J. CHIFFLOT, docteur ès sciences [natu]relles, licencié ès sciences physiques, ch[ef des] Travaux de Botanique à la Faculté des sci[ences], sous-directeur du Jardin botanique de la [ville], avec 214 figures intercalées dans le [texte]. (I, *Fasc. 10*) . . . . **7** [fr.] **50**

Monographie géologique et paléontologique des [Cor]bières orientales, par Louis DONCIEUX, d[octeur] ès sciences, Collaborateur auxiliaire au servi[ce de] la carte géologique de France, avec 69 fi[gures] dans le texte, 7 planches hors texte et une [carte] géologique. (I, *Fasc. 11*) . . . . . .

Contribution à l'étude des composés diazoamid[és] [par] Louis MEUNIER, docteur ès sciences, chef d[e tra]vaux de chimie à la Faculté des sciences de [l'Uni]versité de Lyon. (I, *Fasc. 13*) . . . . **5** fr.

Etude stratigraphique et paléontologique [sur la] Zone à Lioceras concavum du Mont d'Or lyo[nnais], par Attale RICHE, docteur ès sciences, [chargé] d'un cours complémentaire de Géologie à [la Fa]culté des sciences de l'Université de Lyon, [avec] 7 figures dans le texte et 11 planches hor[s texte] (I, *Fasc. 14*) . . . . **7** [fr.] **50**

Lyon. — Imprimerie A. REY, 4, rue Gentil. — 36530

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
NOUVELLE SÉRIE
I. *Sciences, Médecine.* — **Fascicule 16.**

SUR
LES FORMES MIXTES

PAR

LÉON AUTONNE
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Maître de Conférences de Mathématiques à la Faculté des Sciences
de l'Université de Lyon.





LYON
A. REY, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
Rue Gentil, 4

PARIS
LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins

1905

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

EN VENTE

A LYON
Alexandre REY, Imprimeur-Éditeur
4, RUE GENTIL

A PARIS
Chez les Libraires spéciau[x]
SUIVANTS

Librairie Arthur ROUSSEAU, 14, rue Soufflot.

Histoire de la Compensation en droit Romain, par C. APPLETON, professeur à la Faculté de droit. *(Fasc. 21)* . . . . **7 fr. 50**

Caractères généraux de la loi de 1884 sur les Syndicats professionnels; justification de cette loi; réformes possibles. Etude de législation industrielle, par R. GONNARD, docteur en droit, licencié ès lettres, secrétaire à la Société d'Economie Politique, avec une Préface de M. P. PIC, professeur à la Faculté de Droit. *(Fasc. 36)* . . . **3 fr.**

La Représentation des Intérêts dans le[s] [Cor]p[s] élus, par Charles FRANÇOIS, docteur e[n] [d]roi[t] (II, *Fasc. 2)*. . . . . **8** [fr.]

Mélanges Ch. Appleton : *Etudes d'histoire d[u] [d]roi[t]* dédiées à M. Ch. APPLETON, professeur à la [F]acul[té] de Droit de Lyon, à l'occasion de son XX[V] ann[i]versaire de professorat. (II, *Fasc. 13)*. **15** [fr.]

Librairie Félix ALCAN, 108, boulevard Saint-Germain.

Lettres intimes de J.-M. Alberoni adressées au comte I. Rocca, ministre des finances du duc de Parme, et publiées d'après le manuscrit du collège de S. Lazaro Alberoni, par Emile BOURGEOIS, maître de conférences à l'Ecole Normale, avec un portrait et deux fac-similés. *(Fasc. 8)* . **10 fr.**

Essai critique sur l'hypothèse des atomes dans la science contemporaine, par Arthur HANNEQUIN, profes. à la Faculté des Lettres *(Fasc. 14)* **7 fr. 50**

Saint Ambroise et la morale chrétienne au IVe siècle, par Raymond THAMIN, ancien maître de conférences à la Faculté des Lettres de Lyon, professeur au Lycée Condorcet. *(Fasc. 15)*. **7 fr. 50**

La République des Provinces-Unies, la Franc[e] et le[s] Pays-Bas espagnols de 1630 à 1650, par A. WADDINGTON, professeur à la Faculté des Let[tr]es.
Tome I (1630-42). 1 vol. *(Fasc. 18)* . . **6 f[r.]**
Tome II (1642-50) avec deux portraits et un[e] carte 1 vol. *(Fasc. 31)* . . . . **6 fr.**

Le Vivarais. Essai de Géographie régionale, p[ar] Loui[s] BOURDIN, licencié ès sciences, diplômé [d']étude[s] supérieures d'Histoire et de Géograph[ie], ave[c] 20 gravures et 2 graphiques dans le texte *(Fasc. 37)* . . . . **6 fr.**

Librairie Alphonse PICARD et Fils, 82, rue Bonaparte.

La doctrine de Malherbe d'après son commentaire sur Desportes, par Ferdinand BRUNOT, maître de conférences à la Faculté des Lettres de l'Université de Paris, avec 5 pl. hors texte. *(Fasc. 1er)*. **10 fr.**

Le Fondateur de Lyon. Histoire de L. Munatius Plancus, par M. JULLIEN, professeur à la Faculté des Lettres, avec une planche hors texte. *(Fasc. 9)* . . . . **5 fr.**

La Jeunesse de William Wordsworth (1770-1798). Etude sur le « Prélude », par Emile LEGOUIS, prof. à la Faculté des Lettres. *(Fasc. 22)* **7 fr. 50**

La Question des Dix Villes impériales d'Alsace, depuis la paix de Westphalie jusqu'aux arrêts de « Réunions » du Conseil souverain de Brisach (1648-1680), par Georges BARDOT, docteur ès lettres, professeur au Lycée et chargé de conférences à l'Université de Grenoble. (II, *Fasc. 1er)*. **7 fr. 50**

EZÉCHIEL SPANHEIM. — **Relation de la Cour de France en 1690,** *nouvelle édition*, établie sur les manuscrits originaux de Berlin, accompagnée d'un commentaire critique, de fac-simlés, et suivie de la *Relation de la Cour d'Angleterre en 17[0]4*, pa[r] le même auteur, publié avec un index an[alyt]ique par Emile BOURGEOIS, maître de confé[ren]ces à l'Ecole Normale supérieure, professeur à l'[É]cole libre des sciences politiques. (II, *Fasc. 5)* **10 fr.**

Histoire de l'Enseignement secondaire dans l[e] Rhône de 1789 à 1900, par CHABOT, professeur de [s]cience de l'éducation à l'Université de Lyon, et S. CHARLÉTY, maître de Conférences à la Fac[ult]é des Lettr. de l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 7*) **6 fr.**

Bibliographie critique de l'Histoire de Lyon, [d]epuis les origines jusqu'à 1789, par Sébastien CH[AR]LÉTY, professeur adjoint à la Faculté des lettres d[e] l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 9)* . . . **7 fr. 50**

Bibliographie critique de l'histoire de Lyon, [d]epuis 1789 jusqu'à nos jours, par Sebastien CH[AR]LÉTY, professeur adjoint à la Faculté des Le[ttr]es de l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 11)* . **7 fr. 50**

Pythagoras de Rhégion, par Henri LECHAT, ancien membre de l'Ecole d'Athènes, chargé de [c]ours à l'Université de Lyon, ouvrage contenant [di]x-huit figures dans le texte (II, *Fasc. 14)*. . **4 fr.**

La mention en chiffres romains qui précède le numéro du fascicule indique, pour les ouvrages parus [d]ans la Nouvelle Série, qu'ils appartiennent soit au groupe *Sciences-Médecine* (I), soit au groupe *Droit-Lettres* (I[I])

SUR

LES FORMES MIXTES

Lyon. — A. REY, Imprimeur de l'Université, 4, rue Gentil. — 38237.

Exemplaire N° 309

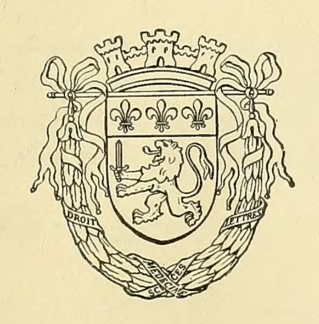
ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
NOUVELLE SÉRIE
I. *Sciences, Médecine.* — **Fascicule 16.**

SUR

LES FORMES MIXTES

PAR

LÉON AUTONNE
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Maître de Conférences de Mathématiques à la Faculté des Sciences
de l'Université de Lyon.

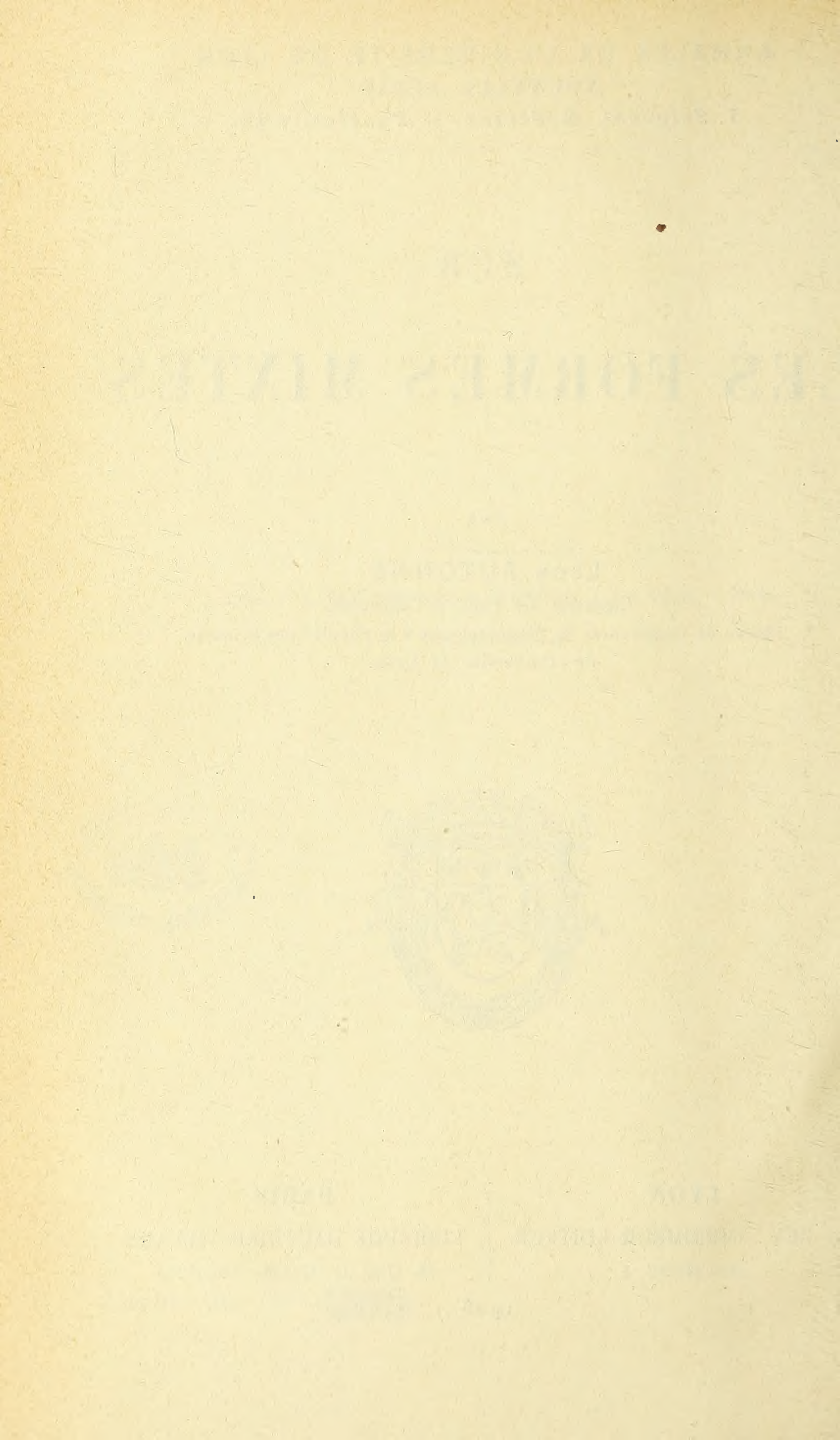




LYON
A. REY, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
Rue Gentil, 4

PARIS
LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins

1905



SUR

LES FORMES MIXTES,

Par **LÉON AUTONNE**.

INTRODUCTION.

Considérons un polynome

$$F\begin{pmatrix} m\ m' \\ x;\ u \end{pmatrix}$$

homogène, avec le degré m, par rapport à N variables x_i, homogène avec le degré m', par rapport à N variables u_i, $\{i = 1, 2, \ldots, N\}$. Supposons que les $2N$ variables ne sont pas indépendantes, mais liées par la relation

$$\omega = \sum_i x_i u_i = 0.$$

Suivant la terminologie employée au cours des présentes recherches, F sera une *forme mixte*, ayant l'*ordre* m et la *classe* m'.

Clebsch a étudié autrefois, pour $N = 3$, de pareilles expressions, comme représentant, par leur évanouissement, la *coïncidence principale* d'un *connexe* plan. Cela revient à considérer comme élément générateur du plan la figure (x, u),

constituée par le point x, de coordonnées x_i, et la droite u, de coordonnées u_i; *u passe par* x. M'attachant à cet ordre d'idées, j'ai construit (*Journal de Mathématiques*, 1887 et 1888) les substitutions, *entre éléments, crémoniennes,* c'est-à-dire *birationnelles* et *de contact.*

Il était naturel d'étendre les notions précédentes à l'espace ordinaire, $N = 4$. L'élément (x, u) est la figure constituée par un plan u et un point x, situé sur u. Cette matière a été traitée dans un travail que j'ai présenté à l'Académie de Bruxelles ([1]). Je me suis attaché surtout aux connexes linéaires ou linéo-linéaires

$$F\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x; & u \end{pmatrix} = 0,$$

aux connexes de classe *un* et aux substitutions crémoniennes.

Mon objet actuel est d'étendre ces recherches au cas où N est quelconque. Alors on a un espace à $N - 1$ dimensions, dont l'élément générateur (x, u) est constitué par un plan u et un point x, situé sur u.

Voici quelle est la disposition générale des matières dans le présent Mémoire.

Les *Préliminaires* contiennent l'explication de la terminologie employée, l'index bibliographique et un aperçu succinct des résultats ultérieurement obtenus.

Dans les *Généralités,* on donne les explications générales sur les éléments (x, u), les connexes, les variétés, ..., dans un espace à $N - 1$ dimensions.

Le corps du Mémoire est divisé en trois Parties assez distinctes.

La *Première Partie* est consacrée au connexe linéaire, dont la théorie complète est faite en s'appuyant sur la notion

---

([1]) *Voir* l'*Index bibliographique* ci-après.

des *Elementartheiler*, due à Weierstrass. On met l'équation du connexe sous une forme *typique* particulièrement simple; on construit les points et plans *fondamentaux* (définis suivant une généralisation de la définition donnée par Clebsch pour les points fondamentaux et droites fondamentales, dans le connexe plan) distincts ou confondus. Les *courbes de coïncidence principale* de Clebsch se généralisent, pour N quelconque, suivant deux sortes de figures $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{V}$, que l'on construit et qui se correspondent dualistiquement [1].

La *Deuxième Partie* a un tout autre caractère. Considérons des polynomes où les variables ne sont pas indépendantes, mais liées par des relations algébriques. On sait que l'Algèbre de ces polynomes ne coïncide pas *en général* avec l'Algèbre habituelle : il n'y a pas de plus grand commun diviseur entre plusieurs polynomes; un facteur peut diviser, étant irréductible, un produit de plusieurs facteurs sans diviser aucun d'eux, ... Dans les formes mixtes les variables sont liées par la relation $\omega = 0$. La deuxième Partie a pour but de montrer que les formes mixtes suivent les règles habituelles de l'Arithmétique et de l'Algèbre, malgré la présence de la condition $\omega = 0$. Si cette proposition n'était pas nécessaire pour la théorie du connexe linéaire, elle devient indispensable pour la théorie des substitutions crémoniennes, objet de la *Troisième Partie*.

Une crémonienne s et son inverse s^{-1} sont représentées par l'algorithme

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\begin{pmatrix} m\ m' \\ x;\ u \end{pmatrix} \\ u_i & \psi_i\begin{pmatrix} n\ n' \\ x;\ u \end{pmatrix} \end{vmatrix} \qquad s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i\begin{pmatrix} p\ p' \\ x;\ u \end{pmatrix} \\ u_i & \eta_i\begin{pmatrix} q\ q' \\ x;\ u \end{pmatrix} \end{vmatrix},$$

---

[1] Ces résultats ont été insérés aux *Comptes rendus* du 9 mai 1904; une Communication sur la matière a été faite aussi au Congrès de Heidelberg (août 1904).

où $\varphi_i, \ldots, \eta_i$ sont des formes mixtes, les huit entiers $m, \ldots, q'$ étant $\geqq 0$.

La classification des s est fondée sur la valeur de ces huit entiers et sur l'évanouissement ou le non-évanouissement identiques de certains déterminants construits avec les dérivées partielles $\{i, j = 1, 2, \ldots, N\}$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \eta_i}{\partial u_j}.$$

Chaque crémonienne s comporte sans ambiguïté diverses variétés *primordiales* $\mathfrak{P}$. A son tour chacune des $\mathfrak{P}$ définit s sans ambiguïté.

On construit les $\mathfrak{P}$ connaissant s. Le problème inverse fera l'objet d'un travail ultérieur.

Je réserve de même pour une autre publication ultérieure ce qui, dans la théorie des formes mixtes, peut intéresser le Calcul intégral (équations aux dérivées partielles) et se rapproche des théories générales de Lie sur les transformations de contact.

Lyon, le 1[er] juin 1904.

PRÉLIMINAIRES.

1° Introduisons d'abord quelques notations et locutions, lesquelles seront d'un usage continuel au cours du présent travail.

2° La notation

$$A = [a_{ij}] \quad \{ i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n \}$$

désignera le *tableau* à m lignes et n colonnes

$$(0) \qquad A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Si $m = n$, on a un *tableau carré* ou *matrice* n-aire, qui aura un déterminant n-aire $|A|$.

En supprimant dans le tableau A [formule (0)] des lignes ou des colonnes, on obtiendra des matrices et des déterminants ρ-aires, $\{ \rho \leq m; \ \rho \leq n \}$.

Si tous les déterminants $(r+1)$-aires, ainsi construits, sont nuls, tandis qu'un au moins des déterminants r-aires est différent de zéro, alors r sera le *rang* du tableau. Soit ϖ le plus petit des entiers m et n, ou leur valeur commune s'ils sont égaux. Alors $r \leq \varpi$. Si r atteint sa valeur maximum ϖ, le tableau est *correct*.

3° Soit une matrice n-aire

$$A = [a_{ij}] \qquad \{ i, j = 1, 2, \ldots, n \}.$$

Si $a_{ij} = 0$, pour $i \neq j$, et $a_{ii} = 1$, on a la matrice unité E.

La matrice A fournit sans ambiguïté d'abord la forme bilinéaire à deux séries de variables

$$A(x; u) = \sum_{ij} a_{ij} u_i x_j,$$

ensuite la substitution linéaire n-aire

$$A = \left| z_i \qquad \frac{\partial A(z; u)}{\partial u_i} \right|$$
$$= \left| z_i \qquad \sum_j a_{ij} z_j \right|.$$

On posera souvent aussi

$$A[z_i] = \sum_j a_{ij} z_j,$$

ce qui permet d'écrire, pour la substitution,

$$| z_i \qquad A[z_i] |,$$

ou, *symboliquement*,

$$A = | z \qquad A[z] |.$$

Parcillement, $S = [s_{ij}]$ étant une matrice n-aire, l'*égalité symbolique*

$$S[x] = 0$$

est équivalente aux n équations

$$\sum_j s_{ij} x_j = 0.$$

4° Avec un tableau quelconque, on peut toujours construire une matrice, en ajoutant, au tableau, des lignes ou des colonnes constituées par des zéros.

Il suffira donc de considérer des matrices.

Les deux matrices

$$A = [a_{ij}] \qquad \text{et} \qquad A' = [a_{ji}]$$

seront *transposées;* chacune sera la *transposée* de l'autre.

Pour la multiplication symbolique et, en général, pour le calcul symbolique, il sera fait usage des règles données par Frobenius (II, *Index bibliogr.*). Je remarquerai seulement que ces règles sont les mêmes pour le calcul des matrices, des formes bilinéaires, ou des substitutions linéaires.

On s'en assure aisément.

Si l'on a les deux matrices n-aires

$$A = [a_{il}], \qquad B = [b_{lj}],$$

il viendra

$$AB = \left[\sum_l a_{il} b_{lj}\right] \qquad \{i, j, l = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Prenons les deux formes bilinéaires $A(x; u)$, $B(x; u)$. Le produit sera la forme bilinéaire

$$AB = \sum_l \frac{\partial A(x; u)}{\partial x_l} \frac{\partial B(x; u)}{\partial u_l}$$

$$= \sum_{lij} a_{il} b_{lj} u_i x_j = \sum_{ij} u_i x_j \sum_l a_{il} b_{lj}.$$

Prenons enfin deux substitutions

$$A = \left| x_i \quad \sum_l a_{il} x_l \right|, \qquad B = \left| x_l \quad \sum_j b_{lj} x_j \right|.$$

Leur produit, au sens de M. Jordan, sera la substitution obtenue en opérant, sur les x, la substitution A d'abord, puis la substitution B. La substitution-produit sera

$$\left| x_i \quad \sum_l a_{il} \sum_j b_{lj} x_j \right| = \left| x_i \quad \sum_j x_j \sum_l a_{il} b_{lj} \right|.$$

C. Q. F. D.

5° Deux matrices A et B sont *équivalentes* s'il existe deux autres matrices L et M, avec $|L| \neq 0$, $|M| \neq 0$, telles que

$$B = MAL.$$

Si $ML = E$ ou $M = L^{-1}$, A et B seront *semblables*. Vis-à-vis de la similitude, la multiplication est une opération invariante, car

$$L^{-1}ABL = (L^{-1}AL)(L^{-1}BL).$$

Si l'on a, à la fois,

$$C = MAL, \qquad D = MBL,$$

les deux *faisceaux* $\{\rho = \text{param. variable}\}$

$$\rho A + B \quad \text{et} \quad \rho C + D$$

sont équivalents, car

$$\rho C + D = M(\rho A + B)L.$$

Le déterminant

$$\Delta = \Delta_0 = |\rho A + B|$$

est un polynome en ρ de degré n. Un k-ième mineur sera un polynome de degré $n - k$. Nommons-le Δ_k et D_k le p. g. c. d. des Δ_k.

Soit a une racine m-ième de l'équation

$$\Delta(\rho) = 0; \qquad D_0 = \Delta_0 = (\rho - a)^{\beta_0}(\ldots), \qquad \beta_0 = m.$$

De même

$$D_1 = (\rho - a)^{\beta_1}(\ldots), \qquad \ldots, \qquad D_k = (\rho - a)^{\beta_k}(\ldots),$$

et enfin

$$D_l(a) \neq 0.$$

Les β formeront une suite décroissante

$$\beta_0 > \beta_1 > \ldots > \beta_k > \ldots > \beta_l \quad \text{ou} \quad 0,$$

tandis que les différences

$$\alpha_{k-1} = \beta_{k-1} - \beta_k$$

forment une suite non croissante d'entiers positifs

$$\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \ldots \geqq \alpha_{l-1}, \qquad \alpha_l = 0.$$

Les l expressions

$$(\rho - a)^{\alpha_0}, \quad (\rho - a)^{\alpha_1}, \quad \ldots, \quad (\rho - a)^{\alpha_{l-1}}$$

sont, d'après la terminologie de Weierstrass (I, *Index*), les *Elementartheiler*, afférents à la racine a de l'équation

$$\Delta(\rho) = 0.$$

Je traduirai *Elementartheiler* par *successif*, sous-entendant facteur ou diviseur.

Soient a, b, c, ... les racines distinctes de l'équation

$$\Delta(\rho) = 0.$$

Je dirai que l'expression

$$\Delta(\rho) = (\rho - a)^{\alpha_0} \ldots (\rho - a)^{\alpha_{l-1}} (\rho - b)^{\beta_0} (\rho - b)^{\beta_1} \ldots (\rho - c)^{\gamma_0} \ldots$$

est *décomposée en ses facteurs successifs*

$(\rho - a)^{\alpha_0}$, ... afférents à la racine a,
$(\rho - b)^{\beta_0}$, ... » » b,
$(\rho - c)^{\gamma_0}$ ... » » c, etc.

Je dirai que les successifs d'un faisceau en définissent la *structure*.

L'admirable théorème de Weierstrass peut s'énoncer ainsi :

L'identité de structure pour deux faisceaux est la condition nécessaire et suffisante de leur équivalence.

Si le polynome $\Delta(\rho)$ était identiquement zéro, l'énoncé serait plus compliqué. Ce cas ne se présentera pas dans le présent Mémoire.

6° Le faisceau $\rho E - A$ est le *faisceau caractéristique* de la matrice A. $|\rho E - A|$ est le *déterminant caractéristique ;* $|\rho E - A| = 0$ est l'*équation caractéristique*. La *structure* d'*une* matrice est, par définition, celle du faisceau caractéristique.

L'équivalence des faisceaux caractéristiques pour deux matrices A et B est la condition de la similitude.

En effet, la relation

$$\rho E - B = L(\rho E - A) M$$

donne

$$E = LM,$$

d'où

$$M = L^{-1} \quad \text{et} \quad B = LAL^{-1};$$

donc, *pour que deux matrices soient semblables, il faut et il suffit qu'elles possèdent même structure.*

7° On sait (II, *Index*) que, si dans une forme bilinéaire $A(x; u)$ on fait subir : 1° aux u, la collinéation ou substitution Q; 2° aux x, la substitution P, on obtient la forme bilinéaire

$$Q'AP(x; u).$$

8° Je désignerai quelquefois une matrice par des parenthèses

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

9° Un tableau à m lignes et n colonnes sera quelquefois décomposé en tableaux partiels. On emploiera alors les notations ci-dessous, qui se comprennent de suite.

	λ	λ'	λ''	
μ	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}'$	$\mathcal{A}''$	...
μ'	$\mathcal{B}$	$\mathcal{B}'$	$\mathcal{B}''$	...
	...	...	...	...

$$m = \mu + \mu' + \ldots; \qquad n = \lambda + \lambda' + \lambda'' + \ldots,$$

où $\mathcal{A}$ est un tableau à μ lignes et λ colonnes, etc.

10° Au cours des présentes recherches, on s'appuie fréquemment sur des résultats établis soit par différents géomètres, soit par l'auteur dans des publications antérieures.

Voici la liste bibliographique des travaux en question. On y renverra simplement par l'indication du chiffre romain qui marque chaque Mémoire.

Ces Ouvrages contiennent les explications détaillées sur des points qu'on se bornera à rappeler succinctement.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

I. Weierstrass, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (*Monatsberichte de l'Académie de Berlin,* 1868, p. 310).

II. Frobenius, *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (*J. f. r. u. a. M.,* t. 84, p. 1).

III. Frobenius, *Ueber das Pfaffsche Problem* (même Recueil, t. 82; p. 230).

IV. König (Julius), *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen* (Teubner, Leipzig, 1903).

V. Clebsch, *Leçons sur la Géométrie,* rédigées par Lindemann et traduites par A. Benoist, t. III, chap. II. — *Sur les connexes* (Gauthier-Villars, Paris, 1883).

VI. Autonne, *Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact* (*Journal de Mathématiques,* 1887, p. 63).

VII. Autonne, *Recherches sur les groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe quadratique crémonien.* — Premier Mémoire : *Étude d'une substitution crémonienne isolée* (même Recueil, 1888, p. 17). — Deuxième Mémoire : *Multiplication des crémoniennes; groupes quadratiques; groupe directeur* (même Recueil, 1888, p. 407).

VIII. Autonne, *Sur les formes quaternaires à deux séries de variables* (*Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers.* publiés par l'Académie Royale de Belgique, t. 59, 1901).

IX. Autonne, *Sur les substitutions crémoniennes dans l'espace.* — Premier Mémoire : *Journal de l'École Polytechnique,* 2e série, 8e Cahier.

A cette liste, on peut ajouter aussi, quoique ayant un rapport beaucoup plus éloigné avec le présent travail, le livre suivant :

X. Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen;* zweiter Abschnitt (Teubner, Leipzig, 1890).

Pour ne pas accroître démesurément le cadre des présentes recherches, j'ai systématiquement écarté tout ce qui me rapprochait des théories de Lie et du Calcul intégral (équations aux dérivées partielles). Ce domaine sera peut-être l'objet d'une publication ultérieure.

Voici maintenant un rapide aperçu des principaux résultats obtenus au cours du présent travail.

GÉNÉRALITÉS.

Prenons 2N variables x_i et u_i, $\{i=1,2,\ldots,N\}$, liées par les trois relations

$$\omega=\sum xu=0,\quad x_0=\sum ex=1,\quad u_0=\sum gu=1,$$

où les e_i et g_i sont des constantes numériques arbitrairement choisies une fois pour toutes. Les x_i et u_i sont respectivement les coordonnées homogènes d'un point x et d'un plan u, dans un espace $\mathfrak{E}$ à $N-1$ dimensions. Le point est sur le plan; la figure constitue un *élément* (x, u). Il y a ∞^{2N-3} éléments et l'on introduit les coordonnées non homogènes λ_α, $\{\alpha=1,2,\ldots,2N-3\}$ de l'élément.

Un polynome $f\begin{pmatrix} m\ m' \\ x;\ u \end{pmatrix}$ homogène par rapport aux x_i et u_i respectivement, avec les degrés m et m' respectivement, est une *forme mixte* si les x_i et u_i sont les coordonnées d'un élément (x, u). m et m' sont l'*ordre* et

la *classe* de la forme mixte. Le *connexe* est le lieu des éléments pour lesquels s'évanouit une forme mixte. L'intersection de N_0 connexes, c'est-à-dire la totalité des éléments communs aux N_0 connexes, est une *variété* à $2N - 3 - N_0$ *dimensions*.

Deux éléments infiniment voisins (x, u) et $(x + dx, u + du)$ sont en *situation réunie* si $\sum u\,dx = \sum x\,du = 0$. Les deux conditions n'en font qu'une à cause de

$$d\omega = \sum x\,du + \sum u\,dx = 0.$$

Une variété est *intégrale* si deux éléments infiniment voisins quelconques sont toujours en situation réunie.

PREMIÈRE PARTIE.
CONNEXE LINÉAIRE.

Dans un espace à $n - 1$ dimensions, le connexe $\mathfrak{A}$ linéaire ou linéo-linéaire a pour équation

$$A(x;\, u) = \sum_{ij} a_{ij} u_i x_j = 0, \qquad \{i, j = 1, 2, \ldots n\},$$

et pour ordre et classe l'unité.

CHAPITRE I.
FORMES TYPIQUES.
(1°).

Un choix approprié de coordonnées ramène A à une forme typique simple.

Prenons l'équation caractéristique $\mathfrak{D}$, dont le premier membre $|\rho E - A|$ décomposé en facteurs successifs est

$$\prod (\rho - l)^\lambda, \qquad \sum \lambda = n.$$

Au successif $(\rho - l)^\lambda$ correspondent : 1° une matrice *partielle* ou *composante* λ-aire L; 2° 2λ variables z_j et w_j, $\{j = 1, 2, \ldots, \lambda\}$,

choisies parmi les $2n$ variables x_i et u_i. On a

$$L(z; w) = l\sum zw + \sum_j w_j \lambda_{j+1} \chi(\lambda - j - 1),$$

où $\chi(s) = 0$ ou 1, suivant que s est < 0 ou $\geqq 0$. La forme typique est

$$A(x; u) = \sum L(z; w),$$

$\sum$ s'étendant aux diverses composantes.

Dans chaque composante les z et les w sont rangées dans un ordre bien défini; on peut parler de la *première* variable z_1 et de la *dernière* w_λ.

Appartiennent à un même *hypersystème* (a), les composantes où le coefficient l est égal à une même racine distincte a de $\mathfrak{D}$.

CHAPITRE II.

POINTS ET PLANS FONDAMENTAUX DISTINCTS OU CONFONDUS.

(17°).

Est par définition *fondamental* tout point ξ (plan η) qui forme un élément du connexe $\mathfrak{A}$ avec *tout* plan passant par ξ (*tout* point situé sur η). Chaque fondamental ξ ou η se rattache à une racine de $\mathfrak{D}$.

Les points fondamentaux ξ_a fournis par la racine a s'obtiennent par la règle suivante :

1° Dans chaque composante L, égaler à zéro toutes les z, sauf z_1, qui prend le nom de *paramètre fondamental* Z;

2° Dans chaque L étrangère à l'hypersystème (a), égaler à zéro le paramètre Z;

3° Attribuer, dans les composantes de l'hypersystème (a), aux Z toutes les valeurs possibles.

Si (a) comprend k composantes, il y a ∞^{k-1} points ξ_a.

Vis-à-vis d'un fondamental donné, une composante L est *active* ou *inactive* suivant que le Z de L est $\neq 0$ ou nul.

La règle est la même pour construire les plans fondamentaux η_a, sauf que le paramètre fondamental W est la dernière $\mathfrak{w}_\lambda$ des $\mathfrak{w}$.

A chaque fondamental ξ correspond un entier K et une courbe unicursale $\mathfrak{C}$ de degré $K - 1$. K est l'ordre minimum des composantes actives pour ξ. La portion de $\mathfrak{C}$ afférente à la matrice L est donnée par les équations

$$z_j = t^{j-1} Z\gamma(K - j),$$

où t est la variable d'unicursalité. *Il y a, sur* $\mathfrak{C}$, K *points fondamentaux, confondus en* ξ.

Des propriétés analogues par dualité se présentent pour les plans fondamentaux.

CHAPITRE III.

COURBES $\mathfrak{X}$ ET DÉVELOPPABLES $\mathfrak{V}$.

(41°).

Les courbes de *coïncidence principale*, introduites par Clebsch dans le connexe plan, $N = 3$, se généralisent, pour N quelconque, en deux sortes de figures (variétés à une dimension) $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{V}$, qui se correspondent dualistiquement. La portion de la courbe $\mathfrak{X}$, afférente à la composante L, s'écrit

$$\Phi z_j = e^{lt} \frac{\partial^{j-1}\varphi}{\partial t^{j-1}}, \qquad \varphi(t) = \sum_{r=0}^{r=\lambda-1} c_r \frac{t^r}{r!},$$

où t est une variable, c_r un paramètre constant arbitraire, Φ un facteur, le même pour toutes les composantes, à définir par la condition $x_0 = 1$.

Par tout point x non fondamental passe une $\mathfrak{x}$ et une seule. Tant que t reste finie, $\mathfrak{x}$ ne passe par aucun fondamental ξ, mais, si t devient infinie, le point courant sur $\mathfrak{x}$ tend toujours vers un ξ. En choisissant convenablement les paramètres c, ainsi que le chemin suivant lequel la variable complexe t^{-1}, dans son plan, tend vers zéro, on peut faire passer $\mathfrak{x}$ par tout ξ, donné d'avance.

CHAPITRE IV.
APPLICATIONS.
(58°).

On construit, pour $N = 4$, les onze types du connexe $\mathfrak{A}$, avec les fondamentaux ξ, les courbes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{x}$. Pour $N = 5$, on se borne à énumérer les vingt-quatre formes typiques de $\mathfrak{A}$.

DEUXIÈME PARTIE.
ALGÈBRE
DES FORMES MIXTES.

On sait, d'après les explications de König (IV, *Index*), que les règles ordinaires de l'Arithmétique et de l'Algèbre habituelles sont applicables seulement aux *domaines holoïdes et complets*. Il faut donc montrer que les formes mixtes constituent un pareil domaine. C'est l'objet de la deuxième Partie.

CHAPITRE I.
GÉNÉRALITÉS.
(1°).

On rappelle d'abord, d'après König, les principes essentiels de l'Arithmétique et de l'Algèbre. Les polynomes, homogènes à la fois par rapport aux x_i et u_i respectivement, constituent un *domaine* Ω, *holoïde, complet et bien défini*, lorsqu'on traite les x_i et u_i comme des variables indépendantes, c'est-à-dire quand on fait abstraction de la relation

$$\omega = \sum x u = 0.$$

Tout facteur irréductible dans Ω est aussi premier.

CHAPITRE II.
DOMAINE HOLOÏDE Ω DES FORMES MIXTES.
(19°).

Ω reste holoïde quand on introduit la relation $\omega = 0$. Mais, c'est par une discussion plus détaillée, qui remplit les Chapitres suivants, qu'on parvient à établir que Ω reste complet et bien défini, malgré la condition

$$\omega = 0.$$

CHAPITRE III.
INVARIANTS ET RÉSIDUELLE D'UNE FORME MIXTE.
(32°).

Sous le bénéfice de $\omega = 0$, une forme mixte est susceptible d'une infinité d'expressions, non distinctes, ou *équivalentes*. Ne sont à étudier que les propriétés *communes* à toutes les formes mixtes, équivalentes entre elles, ou propriétés *permanentes*. Il y a donc lieu de chercher les *invariants* et, pour une forme mixte donnée f, de chercher une expression équivalente, particulièrement simple ou *résiduelle*.

CHAPITRE IV.
DOMAINE HOLOÏDE ET COMPLET Ω DES FORMES MIXTES.
(45°).

Reprenant le domaine Ω du Chapitre II et s'appuyant sur la théorie des invariants et des résiduelles, on établit que u_1 est un facteur à la fois irréductible et premier. Cela permet, par un nombre fini d'opérations rationnelles, de construire le plus grand commun diviseur de deux formes mixtes données quelconques. La conséquence est que le domaine holoïde Ω est complet et bien défini. Il est licite par suite d'appliquer aux formes mixtes les règles du calcul habituel de l'Arithmétique et de l'Algèbre.

CHAPITRE V.
DIVISEURS D'UNE FORME MIXTE DONNÉE.
(56°).

On donne une méthode pour décomposer une forme mixte donnée en facteurs premiers. Eu égard à l'équivalence, la décomposition est possible toujours et d'une seule façon.

CHAPITRE VI.
APPLICATIONS.
(65°).

On calcule certains déterminants, dont les éléments sont des formes mixtes, et l'on discute certains systèmes d'équations du premier degré, où les coefficients des inconnues sont des formes mixtes. Ces résultats sont utiles pour la suite.

TROISIÈME PARTIE.
SUBSTITUTIONS CRÉMONIENNES.

Les crémoniennes sont, par définition, des substitutions qui sont à la fois *birationnelles et de contact*. Leur expression est

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\begin{pmatrix} m\ m' \\ x;\ u \end{pmatrix} \\ u_i & \psi_i\begin{pmatrix} n\ n' \\ x;\ u \end{pmatrix} \end{vmatrix}, \qquad s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i\begin{pmatrix} p\ p' \\ x;\ u \end{pmatrix} \\ u_i & \eta_i\begin{pmatrix} q\ q' \\ x;\ u \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N,$$

où $\varphi_i\begin{pmatrix} m\ m' \\ x;\ u \end{pmatrix}$ est une forme mixte ayant m pour ordre et m' pour classe, ... On a, sous le bénéfice de $\omega = 0$,

$$\sum \varphi\psi = \sum \theta\eta = 0;$$

$\varphi_i(\theta;\eta)$ et $\psi_i(\theta;\eta)$ sont respectivement proportionnelles à x_i et u_i, tandis que $\theta_i(\varphi;\psi)$ et $\eta_i(\varphi;\psi)$ le sont à x_i et u_i.

On n'étudie, bien entendu, que les propriétés permanentes des crémoniennes.

CHAPITRE I.
DÉFINITION DES CRÉMONIENNES.
(1°).

On introduit les crémoniennes. On précise la notion de birationnalité, et aussi les conditions pour que la substitution s soit de contact, c'est-à-dire admette pour invariant l'expression $\sum u\,dx$. L'élément (y, v) où les y_i sont proportionnelles aux φ_i et les v_i aux ψ_i,

est l'*élément image* par s, $(y, v) = s[(x, u)]$, de l'élément (x, u).

CHAPITRE II.
TABLEAUX CARACTÉRISTIQUES.
(14°).

Avec les dérivées partielles

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}, \qquad \varphi'_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}, \qquad \dots,$$

$\{i, j = 1, 2, \dots, N\}$, on peut construire divers tableaux *caractéristiques* pour s et s^{-1}. Avec des notations faciles à comprendre, ces tableaux sont les suivants :

Deux tableaux corrects à $2N + 1$ lignes et $2N$ colonnes :

$$\nabla_s = \left\{ \begin{matrix} \varphi_{ij} & \varphi'_{ij} \\ \psi_{ij} & \psi'_{ij} \\ u_j & x_j \end{matrix} \right\}, \qquad \nabla_{s-1} = \left\{ \begin{matrix} \theta_{ij} & \theta'_{ij} \\ \eta_{ij} & \eta'_{ij} \\ u_j & x_j \end{matrix} \right\}.$$

Quatre tableaux corrects à $2N + 1$ lignes et N colonnes :

$$\left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \psi \\ u \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \varphi_{ij} \\ \psi_{ij} \\ u_j \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} \varphi' \\ \psi' \\ x \end{matrix} \right\}; \quad \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \eta \\ u \end{matrix} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{matrix} \varphi' \\ \eta' \\ x \end{matrix} \right\}.$$

Quatre tableaux corrects à $N + 1$ lignes et $2N$ colonnes :

$$\left\{ \begin{matrix} \varphi & \varphi' \\ u & x \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \varphi_{ij} & \varphi'_{ij} \\ u_j & x_j \end{matrix} \right\}; \quad \left\{ \begin{matrix} \psi & \psi' \\ u & x \end{matrix} \right\}; \quad \left\{ \begin{matrix} \theta & \theta' \\ u & x \end{matrix} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{matrix} \eta & \eta' \\ u & x \end{matrix} \right\}.$$

Viennent enfin les huit tableaux de rang variable, à $N + 1$ lignes et N colonnes :

$$\left\{ \varphi \right\} = \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ u \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \varphi_{ij} \\ u_j \end{matrix} \right\}; \quad \left\{ \varphi' \right\} = \left\{ \begin{matrix} \varphi' \\ x \end{matrix} \right\};$$

$$\left\{ \psi \right\}; \quad \left\{ \psi' \right\}; \quad \left\{ \theta \right\}; \quad \left\{ \theta' \right\}; \quad \left\{ \eta \right\}; \quad \left\{ \eta' \right\};$$

dont les huit rangs r_φ, $r_{\varphi'}$, ..., $r_{\eta'}$ sont les huit *entiers caractéristiques*. Ces huit entiers caractéristiques sont la base de la classification pour les crémoniennes.

CHAPITRE III.
RELATIONS, POUR u CONSTANT, ENTRE LES φ_i.
(28°).

Quand on fixe le plan u dans une situation quelconque $\underline{u}$, les N expressions

$$F_i = \varphi_i(x; \underline{u})$$

dépendent de $N - 1$ variables indépendantes distinctes z_l, $\{l = 1, 2, \ldots, N-1\}$. Le tableau, à N lignes et $N - 1$ colonnes, $\left[\frac{\partial F_i}{\partial z_l}\right]$ a le rang $r_\varphi - 1$. Alors, en vertu de théories connues, il existe, entre les F_i, $N + 1 - r_\varphi$ relations distinctes

$$\Phi_s(F; u) = 0, \qquad \{s = 1, 2, \ldots, N + 1 - r_\varphi\},$$

où Φ_s est un polynome à deux séries de variables homogènes F_i et u_i.

CHAPITRE IV.
VARIÉTÉS PRIMORDIALES.
(35°).

Le lieu des éléments

$$(y, v) = s[(x, \underline{u})] \qquad \text{ou} \qquad (y, v) = s[(\underline{x}, u)]$$

respectivement est, par définition, la variété *primordiale* $\mathfrak{P}_u$ ou $\mathfrak{P}_x$. Il y aura de même des variétés primordiales $\mathfrak{P}'_v$ et $\mathfrak{P}'_y$, lieu des éléments (x, u)

$$s^{-1}[(y, \underline{v})] \qquad \text{et} \qquad s^{-1}[(\underline{y}, v)]$$

respectivement. $\mathfrak{P}_u$, par exemple, comporte une variété ponctuelle Y_u, lieu du point y, et une variété planaire V_u, lieu du plan v, etc. Y_u, par exemple, est évidemment définie par les $N + 1 - r_\varphi$ équations primordiales $\Phi_s = 0$

ci-dessus, $\Phi_s(y; u) = 0$. Plus généralement, on nommera *primordiale* toute équation obtenue en égalant à zéro un polynome homogène à deux séries de variables, une des séries étant en x_i ou u_i, l'autre en y_i ou v_i. Il y aura évidemment quatre sortes d'équations primordiales. On construit les variétés et les équations primordiales, et l'on établit le théorème que voici :

Les huit entiers caractéristiques sont égaux deux à deux

$$r_\varphi = r_{\eta'}; \quad r_{\varphi'} = r_{\theta'}; \quad r_\psi = r_\eta; \quad r_\theta = r_{\psi'}.$$

CHAPITRE V. SUBSTITUTIONS CRÉMONIQUES. (51°).

Dans la discussion générale qui précède, on a supposé chaque entier caractéristique au moins égal à 3. Il est absurde d'égaler un d'eux à zéro ou 2. Si un des entiers caractéristiques au moins est égal à l'unité, la crémonienne s devient *crémonique*. Les crémoniques reviennent au fond à des substitutions ponctuelles, *prolongées* (au sens de Lie).

CHAPITRE VI. ÉLÉMENTS FONDAMENTAUX. (63°).

Un élément (x, u) est, par définition, *fondamental*

pour la crémonienne s, si l'on a

$$\varphi_i = 0, \quad \text{ou} \quad \psi_i = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi_i = \psi_i = 0;$$

pour la crémonienne s^{-1}, si l'on a

$$\theta_i = 0, \quad \text{ou} \quad \eta_i = 0, \quad \text{ou} \quad \theta_i = \eta_i = 0.$$

Soient un point x (un plan u) quelconque, U un plan passant par x (X, un point situé sur u), tel que l'élément (x, U) [ou l'élément (X, u)] soit fondamental. Il n'existe pas plus de : 1° ∞^{2N-5} éléments fondamentaux dans l'espace; 2° ∞^{N-4} points X ou plans U.

Soit une variété Z, lieu d'éléments (x, u); la variété Z′, lieu des éléments $s[(x, u)]$, sera, par définition, la variété-image. On écrira $Z' = s[Z]$. On construit Z′ pour Z donnée quelconque.

L'image, par s, d'un élément fondamental $\mathfrak{F}$ de s, n'est pas un élément (y, v) unique; (y, v) est indéterminé sur une certaine *variété fondamentale* $\mathfrak{v}$. Tout élément de $\mathfrak{v}$ a $\mathfrak{F}$ pour image par s^{-1}.

Si la variété Z contient un élément $\mathfrak{F}$, alors il se sépare de Z′ la variété $\mathfrak{v}$, qui correspond à $\mathfrak{F}$, comptée une ou plusieurs fois.

Cela permet de préciser la notion de variété primordiale, $\mathfrak{P}_u$ par exemple. $\mathfrak{P}_u$ est bien le lieu des éléments $s[(x, u)]$ à u fixe, mais lorsque x parcourt u, sans venir en un point X.

Toute cette théorie est la généralisation des propriétés qui, dans les substitutions planes Cremona, appartiennent aux points fondamentaux et aux courbes fondamentales.

On parvient à un théorème que voici :

Si une variété intégrale W *donnée est primordiale pour une crémonienne s au moins, cette crémonienne est unique et bien déterminée.*

On se trouve alors en présence d'un problème double :

1° A quelles conditions J nécessaires et suffisantes doit satisfaire W pour que s existe.

2° Les conditions J étant remplies par hypothèse, construire s.

Ce problème fera l'objet d'un travail ultérieur.

GÉNÉRALITÉS.

1° Nommons *forme à plusieurs séries de variables*

$$x_1, x_2, \ldots; \quad y_1, \ldots; \quad u_1, \ldots; \quad \ldots,$$

un polynome, homogène, séparément par rapport aux diverses séries de variables. Les diverses séries ne contiendront pas forcément le même nombre de variables.

La notation

$$f\begin{pmatrix} m & n & m' & \\ x; & y; & u; & \ldots \end{pmatrix}$$

met en évidence, dans la forme f, les degrés d'homogénéité m, n, m', ... pour les diverses séries de variables. La notation

$$f(x;\ y;\ \underline{u};\ \ldots),$$

ou le *soulignement,* indiquera que, dans une des séries, u, par exemple, les variables sont momentanément envisagées comme des paramètres constants.

Je m'occuperai surtout des formes bi-N-aires, c'est-à-dire à deux séries de N variables. On aura des formes

Bibinaires.....................	$N = 2$
Biternaires...................	$= 3$
Biquaternaires................	$= 4$
....	.....

2° Prenons la forme bi-N-aire

$$f(x;\, u) = f(x_1, \ldots, x_N;\, u_1, \ldots, u_N).$$

On assimilera les x_i (ou les u_i), avec $i = 1, 2, \ldots, N$ aux N coordonnées homogènes d'un point x (ou d'un plan u) dans un espace $\mathfrak{E}$ à $N - 1$ dimensions.

La valeur absolue des coordonnées homogènes sera donnée par les égalités

$$1 = x_0 = \sum_i e_i x_i = \sum ex,$$

$$1 = u_0 = \sum_i g_i u_i = \sum gu,$$

où les e_i et g_i sont des constantes numériques arbitrairement choisies, une fois pour toutes. Un point situé sur le plan, dont l'équation est $\sum ex = 0$, aura ses coordonnées infinies. Le plan dont les coordonnées sont proportionnelles aux e_i sera nommé, pour ce motif, *plan de l'infini*.

Pareillement, le point dont les coordonnées sont proportionnelles aux g_i sera le *point de l'infini*.

3° L'*élément* (x, u) sera la figure constituée par le point x et le plan u, en situation telle que

$$\omega = \sum ux = 0;$$

autrement dit : 1° le point est sur le plan ; 2° le plan passe par le point.

Il y a dans l'espace $\mathfrak{E}$

$$\infty^{2N-3}$$

éléments, car il y a $2N$ variables x_i et u_i, liées par les trois relations

$$x_0 = 1, \qquad u_0 = 1, \qquad \omega = 0.$$

4° On peut attribuer à un élément (x, u) des paramètres ou coordonnées, au nombre de $2N - 3$.

On fera d'abord $e_1 = e_2 = \ldots = e_{N-1} = 0$, $e_N = 1$, $x_0 = x_N$; puis on fera $g_1 = \ldots = g_{N-2} = g_N = 0$, $g_{N-1} = -1$ et l'on définira u_N par la condition $\omega = 0$.

On posera enfin les égalités suivantes qui introduisent les $2N-3$ *coordonnées non homogènes*

$$\lambda_\alpha, \quad \{\alpha = 1, 2, \ldots, 2N-3\},$$

de l'élément (x, u):

$$(0) \quad \begin{cases} \dfrac{x_j}{\lambda_j} = \dfrac{x_{N-1}}{\lambda_{N-1}} = \dfrac{x_N}{1} & \{j = 1, 2, \ldots, N-2\}, \\[2ex] \dfrac{u_j}{\lambda_{N-1+j}} = \dfrac{u_{N-1}}{-1} = \dfrac{u_N}{\lambda_{N-1} - \sum\limits_j \lambda_j \lambda_{N-1+j}}. \end{cases}$$

Ces formules permettent de passer des λ_α aux x_i et u_i, ou réciproquement.

Si l'on possède les x_i et u_i, on écrira

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda_1 = x_1 : x_N, & \ldots, & \lambda_{N-1} = x_{N-1} : x_N, \\ -\lambda_N = u_1 : u_{N-1}, & \ldots, & -\lambda_{2N-3} = u_{N-2} : u_{N-1}. \end{cases}$$

Si l'on possède les λ_α, on écrira

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda_1, & \ldots, & x_{N-1} = \lambda_{N-1}, & x_N = 1, \\ u_1 = \lambda_N, & \ldots, & u_{N-2} = \lambda_{2N-3}, & u_{N-1} = -1, \\ u_N = \lambda_{N-1} - \sum\limits_j \lambda_j \lambda_{N-1+j}. \end{cases}$$

5° Une *variété* ou *multiplicité* à *s dimensions* sera le lieu des éléments dont les coordonnées dépendent de s paramètres distincts ou sont liées par $2N-3-s$ équations distinctes. On supposera toujours ces équations algébriques et la variété sera elle-même algébrique.

6° On verra dans le corps du Mémoire (6°, troisième Partie) que le changement le plus général des coordonnées homogènes, dans l'espace $\mathfrak{C}$ à $N-1$ dimensions, remplace

l'élément (x, u) par l'élément (y, v) tel que

$$y = A[x], \qquad v = A'^{-1}[u]$$

où A est une matrice N-aire quelconque avec $|A| \neq 0$. Les variables x_i et u_i sont ce qu'on a appelé *contragrédientes*.

Dans l'espace $\mathfrak{C}$, l'expression la plus générale de la dualité consiste à permuter x_i et u_i. Cela revient à transformer les éléments par le procédé des polaires réciproques, la *quadrique de base* étant $\sum x^2 = 0$.

7° Une forme bi-N-aire $f\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix}$, d'*ordre* m et de *classe* m', sera une *forme mixte*, si les x_i et u_i sont les coordonnées d'un élément, c'est-à-dire liées par les relations

$$\omega = 0, \qquad x_0 = u_0 = 1.$$

Dans la deuxième Partie de ce Mémoire je donne les explications détaillées sur les règles du calcul, en ce qui concerne les formes mixtes.

8° Le lieu des éléments (x, u) tels que $f\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix} = 0$ est un *connexe* d'*ordre* m et de *classe* m'. L'*intersection* de N_0 connexes {variété à $2N - 3 - N_0$ dimensions},

$$f_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_{N_0} = 0,$$

sera le lieu des

$$\infty^{2N-3-N_0}$$

éléments communs aux N_0 connexes.

En coordonnées λ_α, l'équation du connexe

$$f(x; u) = f(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N; u_1, u_2, \ldots, u_{N-2}, u_{N-1}, u_N) = 0$$

sera, en vertu des relations (o) du 4°,

$$f\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-1}, 1; \lambda_N, \ldots, \lambda_{2N-3}, -1, \lambda_{N-1} - \sum_j \lambda_j \lambda_{N-1+j}\right)$$
$$j = 1, 2, \ldots, N-2.$$

9° Considérons deux éléments infiniment voisins (x, u) et $(x+dx,\ u+du)$, les différentielles étant, bien entendu, liées par les relations

$$dx_0 = \sum e\,dx = 0, \qquad du_0 = \sum g\,du = 0,$$

$$d\omega = \sum x\,du + \sum u\,dx = 0.$$

Les deux éléments sont en situation réunie, si l'on a

$$\sum u\,dx = 0$$

et, par conséquent, aussi $\sum x\,du = 0$, ou réciproquement.

En coordonnées λ_α du 4°, la situation réunie est exprimée par la relation

$$(o) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \sum_j \lambda_{N-1+j}\,d\lambda_j - d\lambda_{N-1} = \Lambda = 0 \\ j = 1, 2, \ldots, N-2 \end{array} \right\}.$$

10° Une variété est *intégrale*, si deux éléments infiniment voisins, pris à volonté sur la variété, sont toujours en situation réunie.

Parmi les variétés intégrales méritent une attention spéciale celles qui sont formées par les ∞^{N-2} éléments, constitués par un point x (plan u) et les ∞^{N-2} plans passant par x (∞^{N-2} points situés sur u).

En effet, si $du_j = 0$ ou $dx_i = 0$, on a bien la condition de situation réunie.

11° Prenons une variété $\mathfrak{P}$, à R dimensions, où les λ_α soient exprimées à l'aide de R paramètres arbitraires distincts

$$t_s, \quad \{s = 1, 2, \ldots, R\}.$$

On aura

$$d\lambda_\alpha = \sum_s \lambda_{\alpha s}\,dt_s, \qquad \lambda_{\alpha s} = \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial t_s},$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, 2N-3,$$

et, sous le bénéfice de la formule (o) du 9°,

$$0 = -\sum_s \lambda_{N-1,s} dt_s + \sum_{js} \lambda_{N-1+j} \lambda_{js} dt_s$$
$$= \sum_s dt_s \left\{ -\lambda_{N-1,s} + \sum_j \lambda_{js} \lambda_{N-1+j} \right\}.$$

Comme les t_s sont des variables indépendantes, il vient finalement les conditions nécessaires et suffisantes pour que la variété $\mathfrak{V}$ soit intégrale

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \sum_j \lambda_{N-1+j} \lambda_{js} - \lambda_{N-1,s} = 0 \\ s = 1, 2, \ldots, R; \qquad j = 1, 2, \ldots, N-2 \end{array} \right\}.$$

12° Supposons maintenant $\mathfrak{V}$ donnée par

$$S = 2N - 3 - R$$

équations

$$f_\sigma(\lambda) = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, S.$$

Il devra exister $S+1$ quantités τ et p_σ telles que

$$\tau A = \tau \sum_j \lambda_{N-1+j} d\lambda_j - \tau d\lambda_{N-1} = \sum_\sigma p_\sigma df_\sigma.$$

Or, si

$$f_{\sigma\alpha} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial \lambda_\alpha}, \qquad \{ j = 1, 2, \ldots, N-2; \; 0 < \alpha \leqq 2N-3 \},$$

$$df_\sigma = \sum_\alpha f_{\sigma\alpha} d\lambda_\alpha = \sum_j f_{\sigma j} d\lambda_j + f_{\sigma,N-1} d\lambda_{N-1} + \sum_j f_{\sigma,N-1+j} d\lambda_{N-1+j}.$$

Alors successivement

$$\tau \sum_j d\lambda_j \lambda_{N-1+j} - \tau d\lambda_{N-1} = \sum_\sigma p_\sigma df_\sigma$$
$$= \sum_j d\lambda_j \sum_\sigma p_\sigma f_{\sigma j} + d\lambda_{N-1} \sum_\sigma p_\sigma f_{\sigma,N-1}$$
$$+ \sum_j d\lambda_{N-1+j} \sum_\sigma p_\sigma f_{\sigma,N-1+j}.$$

Identifions les coefficients des mêmes différentielles, il viendra

$$\tau\lambda_{N-1+j} = \sum_\sigma p_\sigma f_{\sigma j}; \qquad -\tau = \sum_\sigma p_\sigma f_{\sigma, N-1},$$

$$\sum_\sigma p_\sigma f_{\sigma, N-1+j} = 0.$$

Éliminant τ, on aura $2N - 4$ équations entre les S inconnues p_σ

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \sum_\sigma p_\sigma \{ f_{\sigma j} + \lambda_{N-1+j} f_{\sigma, N-1} \} = 0 \\ \sum_\sigma p_\sigma f_{\sigma, N-1+j} = 0; \qquad j = 1, 2, \ldots, N-2 \end{array} \right\}.$$

Les coefficients des p_σ forment un tableau à $2N - 4$ lignes et à S colonnes. Comme les inconnues p_σ ne s'évanouissent pas toutes, le rang du tableau doit être inférieur à S et le tableau doit être incorrect. En effet

$$2N - 4 - S = 2N - 4 - (2N - 3 - R) = R - 1 \geqq 0,$$

et l'on a plus d'équations que d'inconnues.

13° Soit P une variété lieu des éléments (x, u).

Le point x décrira une *variété ponctuelle* X, le plan u parcourra une *variété planaire* U.

Il va sans dire que, pour P donné, il existera des relations étroites entre les variétés X et U.

On trouvera dans la troisième Partie, au Chapitre IV, un exemple de ces relations lorsque P est une certaine variété $\mathfrak{P}$ *primordiale* intégrale.

14° Par analogie avec l'espace ordinaire les variétés à *une* dimension, ponctuelle et planaire, s'appelleront respectivement *courbe* et *développable*.



PREMIÈRE PARTIE.

CONNEXE LINÉAIRE.

CHAPITRE I.

FORMES TYPIQUES.

1° Dans un espace $\mathfrak{E}$ à $n - 1$ dimensions, on a défini la position $\{ i = 1, 2, \ldots, n \}$:

d'un point x, par n coordonnées homogènes *ponctuelles* x_i. La valeur absolue des x_i est définie par la relation

$$1 = x_0 = \sum_i e_i x_i,$$

où les e_i sont des constantes numériques choisies arbitrairement une fois pour toutes. $x_0 = 0$ sera le *plan de l'infini*.

d'un plan u, par n coordonnées homogènes *planaires* u_i. La valeur absolue des u_i est définie par la relation

$$1 = u_0 = \sum_i g_i u_i,$$

où les g_i sont des constantes numériques choisies arbitrairement une fois pour toutes. $u_0 = 0$ sera le *point de l'infini*.

On supposera, bien entendu, *quelconque* la position du plan ou du point de l'infini.

Il y aura, dans $\mathfrak{E}$, ∞^{n-1} points x, ou plans u.

2° L'*élément* (x, u) est la figure constituée par un point et un plan *en situation réunie*

$$\omega = \sum ux = 0 = E(x, u)$$

(x est sur u; u passe par x). Il y aura évidemment, dans l'espace $\mathfrak{E}$, ∞^{2n-3} éléments.

3° Soit une matrice n-aire

$$A = [a_{jk}] \qquad \{j, k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Reportons-nous aux explications, données dans les *Préliminaires,* sur les matrices, les formes bilinéaires, les substitutions linéaires, ou collinéations.

Je nommerai *connexe linéaire* $\mathfrak{A}$ la figure lieu des éléments (x, u) qui satisfont à la condition

$$0 = A(x, u) = \sum_{jk} a_{jk} u_j x_k.$$

Soient λ et μ deux constantes quelconques. Les deux matrices A et $\lambda A + \mu E$ fourniront évidemment le même connexe linéaire $\mathfrak{A}$.

On pourra donc toujours admettre que l'équation caractéristique $\mathfrak{G}$

$$0 = |\rho E - A| = |\rho E - \mu E - \lambda A| = |(\rho - \mu) E - \lambda A|$$

possède une racine nulle. Si la racine nulle n'est pas n-uple, une autre racine pourra encore être prise égale à l'unité. Il suffit pour tout cela de choisir convenablement λ et μ.

4° Soient P et Q deux matrices n-aires, de déterminant $\neq 0$. Opérons, sur les x et les u, les collinéations P et Q respectivement.

Le système qui définit le connexe $\mathfrak{A}$

$$E(x, u) = A(x, u) = 0$$

devient

$$Q'P(x, u) = Q'AP(x, u) = 0.$$

Comme la situation réunie doit être conservée, on doit avoir

$$Q'P = E$$

et, de là,

$$Q' = P^{-1}.$$

Le *changement de coordonnées*, exprimé par la collinéation P, se traduit donc, sur les équations du connexe, par ce fait que la matrice A est remplacée par la matrice semblable $P^{-1}AP$.

On ne considérera pas comme distincts deux connexes qui ne diffèrent que par l'orientation.

L'étude géométrique de $\mathfrak{A}$ se ramène donc uniquement à celle de la structure de la matrice A; on n'aura qu'à examiner quels sont les successifs du faisceau caractéristique

$$\rho E - A.$$

5° Soient un connexe $\mathfrak{A}$ et A la matrice correspondante. Il sera, en vertu de ce qui précède, licite, sans changer la nature géométrique ou la configuration de $\mathfrak{A}$, de remplacer A par une matrice *quelconque* A_0, de même structure que A.

Je choisirai bien entendu A_0 aussi simple que possible.

Soit le déterminant caractéristique de A

$$|\rho E - A| = (\rho - a)^{\alpha}(\rho - b)^{\beta}(\rho - c)^{\gamma}\ldots, \qquad \{n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots\},$$

décomposé en ses successifs, les racines a, b, c, ... étant distinctes ou non. D'après M. Frobenius (II, p. 21), nous prendrons pour A_0 une matrice telle que

$$\begin{aligned} A_0(x, u) = a(x_1 u_1 + \ldots + x_\alpha u_\alpha) + x_2 u_1 + \ldots + x_\alpha u_{\alpha-1} \\ + b(x_{\alpha+1} u_{\alpha+1} + \ldots + x_{\alpha+\beta} u_{\alpha+\beta}) + x_{\alpha+2} u_{\alpha+1} + \ldots \\ + x_{\alpha+\beta} u_{\alpha+\beta-1} + \ldots . \end{aligned}$$

A_0 a-t-elle la structure voulue? M. Frobenius n'en produit pas la démonstration. Comme la question a une importance capitale dans les présentes recherches, je vais développer cette démonstration avec quelque détail.

6° LEMME I. — *La matrice n-aire*

$$A = \begin{Vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & a \end{Vmatrix}, \qquad |\rho E - A| = (\rho - a)^n,$$

$$A(x, u) = \sum xu + x_2 u_1 + \ldots + x_n u_{n-1},$$

a un successif unique $(\rho - a)^n$.

On voit que dans la matrice A :

Tous les éléments situés sur la diagonale principale sont égaux à a;

Tous les éléments $a_{j,j+1}$ sont égaux à l'unité;

Tous les autres éléments sont nuls.

Le système $(aE - A)[x] = 0$ se réduit aux $n - 1$ équations distinctes

$$0 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n.$$

Le déterminant $|aE - A|$ a le rang $n - 1$; les premiers mineurs de $|\rho E - A|$ ne sont pas tous divisibles par $\rho - a$ et le lemme est démontré.

La matrice A est ce que M. Frobenius (II, p. 19) appelle *élémentaire* ou *irréductible*.

7° LEMME II. — *Dans la matrice n-aire*

$$\begin{array}{c|c|c|} & \overbrace{}^{\alpha} & \overbrace{}^{\beta} \\ \alpha \Big\{ & A & 0 \\ \hline \beta \Big\{ & 0 & B \end{array} = P,$$

tout mineur P_m, $(n - m)^{\text{ième}}$ et m-aire, *c'est-à-dire à* m^2

éléments, $m \leq n$, *est donné, pourvu que* $P_m \not\equiv 0$, *par la formule*

$$P_m = \pm A_r B_s$$

$$(r + s = m; \qquad r \leq \alpha; \qquad s \leq \beta),$$

où :

A_r *est un* $(\alpha - r)^{\text{ième}}$ *mineur*, r-aire *de* A;

B_s *est un* $(\beta - s)^{\text{ième}}$ *mineur*, s-aire *de* B.

Supposons que, pour former P_m, on ait emprunté :

à A, r lignes et r' colonnes;

à B, $m - r$ lignes et $m - r'$ colonnes.

Je dis que $r' = r$. Si $r' \neq r$, on peut admettre $r' < r$, sinon il suffirait de transposer les matrices.

Si $r' < r$, la matrice m-aire $\mathfrak{P}_m$, telle que $P_m = |\mathfrak{P}_m|$, s'écrit

$$\begin{array}{r} r \left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} \right. \\ m - r \left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} \right. \end{array} \overset{\qquad \overbrace{\quad}^{r'} \quad \overbrace{\qquad\quad}^{m - r'}}{\left|\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{B} \end{array}\right|} = \mathfrak{P}_m,$$

où $\mathcal{A}$ est un tableau à r lignes et r' colonnes, ...

On a

$$P_m = \sum \pm \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

où $\mathfrak{A}$ est un déterminant r'-aire provenant du tableau $\mathcal{A}$, tandis que $\mathfrak{B}$ est le déterminant $(m - r')$-aire, mineur complémentaire dans P_m du mineur $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$ contiendrait $m - r$ lignes fournies par le tableau B et, par suite,

$$m - r' - (m - r) = r - r'$$

lignes formées de zéros. On aurait $P_m = 0$, ce qui est absurde. Donc $r' = r$.

Alors le tableau $\mathcal{A}$ devient une matrice r-aire; le tableau $\mathcal{B}$ devient une matrice $(m-r)$-aire. Il vient simplement

$$P_m = \pm |\mathcal{A}| \, |\mathcal{B}|.$$

Or $|\mathcal{A}|$ est un mineur A_r de A; $|\mathcal{B}|$ est un mineur B_s de B; $r+s=m$.

Le lemme est ainsi démontré.

Corollaire. — *Si l'on a la matrice n-aire*

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 & \overbrace{\quad}^{\alpha} & \overbrace{\quad}^{\beta} & \overbrace{\quad}^{\gamma} & \dots & \dots & \\
\hline
\alpha\Big\{ & A & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\hline
\beta\Big\{ & 0 & B & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\hline
\gamma\Big\{ & 0 & 0 & C & 0 & 0 & \dots \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & &
\end{array} = P,$$

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \dots,$$

tout mineur m-aire P_m, *tel que*

$$P_m \neq 0,$$

est donné par la formule

$$P_m = \pm A_r B_s C_t \dots; \qquad m = r+s+t\dots$$
$$(r \leqq \alpha; \qquad s \leqq \beta; \qquad t \leqq \gamma; \qquad \dots)$$

où A_r *est un mineur r-aire de la matrice*

$$\alpha\text{-aire } A, \qquad \dots.$$

La démonstration se réduit à l'application réitérée du lemme II.

8° Considérons k matrices a_l,

$$\{ l = 0, 1, \dots, k-1 \}.$$

α_l étant l'ordre de a_l. De plus, chacune des a_l aura la nature indiquée pour la matrice A au lemme I (6°), avec le même coefficient a pour toutes les a_l. Posons

$$A_l = \rho E - \mathrm{a}_l,$$

introduisons la matrice n-aire Q et posons

$$Q = \begin{array}{|c|c|c|c|c}
\hline
A_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline
0 & A_1 & 0 & 0 & \dots \\ \hline
0 & 0 & A_2 & 0 & \dots \\ \hline
0 & 0 & 0 & A_3 & \dots \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array} \qquad Q_0 = |Q|,$$

avec

$$n = \sum_l \alpha_l, \qquad \alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \dots \geqq \alpha_{k-1}.$$

Nommons :

Q_m *un* $m^{\text{ième}}$ *mineur de* $|Q|$, *déterminant* $(n-m)$*-aire*,
$\mathcal{A}_l^{(q_l)}$ *un* $q_l^{\text{ième}}$ *mineur de* $|A_l|$, *déterminant* $(\alpha_l - q_l)$*-aire*.

Tout Q_m, qui n'est pas $\equiv 0$, s'obtiendra, eu égard au corollaire du lemme II, par la formule

$$(1) \qquad Q_m = \pm \prod_l \mathcal{A}_l^{(q_l)},$$

$$n - m = \sum_l (\alpha_l - q_l),$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad m = \sum_l q_l, \qquad 0 \leqq m \leqq n, \qquad 0 \leqq q_l \leqq \alpha_l.$$

Posons $t = \rho - a$; on verra immédiatement que :

I. $\mathcal{A}_l^{(0)} = |A_l| = t^{\alpha_l}$;

II. Parmi les $\mathcal{A}_l^{(q_l)}$, où $q_l > 0$, un au moins n'est pas divisible par t.

Tout cela résulte immédiatement du lemme I.

9° Faisons d'abord $m \geqq k$. Alors il faudra, dans la formule (2) ci-dessus, choisir k entiers, positifs ou nuls, q_l dont la somme soit m. Pour avoir, après s'être donné m, tous les Q_m, il faudra faire ce choix des q_l de toutes les façons possibles. En particulier, puisque $m \geqq k$, on pourra choisir tous les q_l positifs.

Ayant égard à ce qui a été dit au 8°, *in fine*, nous pouvons remarquer que, pour ces P_m là, à q_l tous positifs, chacun des facteurs $\mathcal{A}$ peut être choisi tel qu'il n'est pas divisible par t. Le P_m considéré peut être choisi ainsi de manière à n'être pas divisible par t.

Ainsi :

Dans le déterminant $Q_0 = |Q|$, le p. g. c. d. des $m^{\text{ièmes}}$ mineurs P_m, polynomes en ρ, ne contient pas, pour $m \geqq k$, le facteur $t = \rho - a$.

10° Examinons maintenant les mineurs P_m où $m < k$. Rangeons les α_l en une suite *non croissante*

$$\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \ldots \geqq \alpha_l \geqq \ldots \geqq \alpha_{k-1},$$

et désignons par e_m la somme des $k - m$ derniers α

$$e_m = \alpha_m + \alpha_{m+1} + \ldots + \alpha_{k-1}.$$

Pour former la somme [formule (2), 8°]

$$m = \sum_l q_l \qquad \{l = 0, 1, \ldots, k-1\},$$

on devra prendre *au plus* m entiers q_l positifs et *au moins*

$k-m$ entiers q_ι égaux à zéro. Or (formule I du 8°), pour $q_\iota = 0$, le facteur $\mathcal{A}$ se réduit à t^{α_ι}.

La somme de $k-m$ exposants α_ι quelconques est égale ou supérieure à la somme e_m des $m-k$ *derniers* α_ι.

Il en résulte que le P_m considéré est divisible par

$$t^{e_m}$$

au moins.

D'autre part, il existe des P_m où il vient effectivement

$$1 = q_0 = q_1 = \ldots = q_{m-1}, \qquad 0 = q_{k-1} = q_{k-2} = \ldots = q_m;$$

un au moins de ces P_m là, convenablement choisi, est divisible par

$$t^{e_m}$$

et non par

$$t^{e_m+1}.$$

Nous avons ainsi le résultat suivant :

Dans le déterminant $|Q|$, *le p. g. c. d. des* $m^{\text{ièmes}}$ *mineurs* Q_m, *pour* $m < k$, *est divisible exactement par* t^{e_m} :

$$e_m = \alpha_m + \alpha_{m+1} + \ldots + \alpha_{k-1}.$$

D'ailleurs

$$|Q| = Q_0 = t^{e_0}, \qquad e_0 = n.$$

11° Ainsi le déterminant $|Q|$ (8°) est la puissance t^n de t, où

$$n = e_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}.$$

Le p. g. c. d. des premiers mineurs est divisible exactement par t^{e_1},

$$e_1 = e_0 - \alpha_0;$$

le p. g. c. d. des $m^{\text{ièmes}}$ mineurs est divisible exactement par t^{e_m} avec

$$e_m = e_{m-1} - \alpha_{m-1}, \qquad \ldots.$$

Enfin le p. g. c. d. des $k^{\text{ièmes}}$ mineurs ne s'évanouit plus pour

$$t = 0 \quad (9°).$$

Reprenons les matrices a_i du 8° et introduisons la matrice n-aire P :

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{vmatrix}$$

On a $Q = \rho E - P$.

Toute la discussion précédente se résume dans une proposition unique :

THÉORÈME. — P *possède les k successifs*

$$(\rho - a)^{\alpha_0}, \quad (\rho - a)^{\alpha_1}, \quad \dots, \quad (\rho - a)^{\alpha_{k-1}}.$$

Les fondements de la présente démonstration (à partir du 6°) sont dus à Weierstrass (I).

12° Construisons, par le procédé qui vient d'être expliqué pour P :

Une matrice m-aire A telle que le déterminant $|\rho E - A|$, décomposé en ses facteurs successifs, soit

$$|\rho E - A| = (\rho - a)^{\alpha_0} (\rho - a)^{\alpha_1} \dots (\rho - a)^{\alpha_{k-1}};$$

une matrice m_1-aire B telle que, de même,

$$|\rho E - B| = (\rho - b)^{\beta_0} (\rho - b)^{\beta_1} \dots (\rho - b)^{\beta_{k_1-1}},$$

$$\dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots$$

$$n = m_1 + m_2 + \dots,$$

où $a, b, c, \dots$ sont des nombres inégaux quelconques, tandis

que les α, β, γ, ... sont des entiers positifs arbitraires avec

$$\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \ldots,$$
$$\beta_0 \geqq \beta_1 \geqq \ldots,$$
$$\gamma_0 \geqq \gamma_1 \geqq \ldots.$$

La matrice Ω, n aire,

$$\Omega = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & B & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & C & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

aura le type voulu, indiqué par M. Frobenius (5°) et possédera la structure voulue, car

$$|\rho E - \Omega| = (\rho - a)^{\alpha_0} \ldots (\rho - a)^{\alpha_{k-1}} (\rho - b)^{\beta_0} \ldots,$$

puisque

$$|\rho E - \Omega| = |\rho E - A|\,|\rho E - B|\,|\rho E - C| \ldots.$$

13° Considérons le connexe $\mathfrak{A}$, ayant pour équation $A(x, u) = 0$. En vertu des explications précédentes, il sera licite, sans restreindre la généralité, d'attribuer à la matrice n-aire A l'expression simplifiée de M. Frobenius.

Prenons le déterminant $\Delta = |\rho E - A|$ décomposé en ses successifs

$$\Delta = (\rho - a)^{\alpha_0} \ldots (\rho - a)^{\alpha_{k-1}} (\rho - b)^{\beta_0} \ldots (\rho - b)^{\beta_{k'-1}} (\rho - c)^{\gamma_0} \ldots,$$
$$a \neq b \neq c \neq \ldots,$$
$$n = \alpha_0 + \ldots + \alpha_{k-1} + \beta_0 + \ldots + \beta_{k'-1} + \gamma_0 + \ldots,$$
$$m = \alpha_0 + \ldots + \alpha_{k-1}, \qquad m' = \beta_0 + \ldots + \beta_{k'-1}, \qquad \ldots.$$

On considérera toujours pour A l'expression

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c}
 & \alpha_0 & \alpha_1 & & \alpha_{k-1} & \beta_0 & & \\
\hline
\alpha_0 \left\{ \right. & \mathcal{A}_0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\hline
\alpha_1 \left\{ \right. & 0 & \mathcal{A}_1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\hline
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
\alpha_{k-1} \left\{ \right. & 0 & 0 & \vdots & \mathcal{A}_{k-1} & 0 & 0 & \ldots \\
\hline
\beta_0 \left\{ \right. & 0 & 0 & \vdots & 0 & \mathcal{B}_0 & 0 & \ldots \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
\hline
\end{array}
$$

où les matrices $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{A}_{k-1}$, $\mathcal{B}_0$, ... respectivement α_0-aire, α_1-aire, ..., α_{k-1}-aire, β_0-aire, ... sont les *matrices partielles* ou *composantes* de la matrice A.

Les matrices $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, ... correspondent respectivement aux successifs $(\rho - a)^{\alpha_0}$, $(\rho - a)^{\alpha_1}$, ... Les k matrices $\mathcal{A}_0$, ..., $\mathcal{A}_{k-1}$ constituent l'*hypersystème* (a) afférent à la racine a de l'équation caractéristique $\mathcal{D}$

$$\Delta = |\rho E - A| = 0.$$

14° Soit une matrice partielle quelconque L, λ-aire, correspondant au successif $(\rho - l)^\lambda$. La matrice appartiendra à l'hypersystème afférent à la racine l de $\mathcal{D}$.

En vertu de ce qui précède, on aura

$$
L = \left\| \begin{array}{cccccc}
l & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & l & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & l & & & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \ddots & 1 \\
0 & 0 & 0 & & 0 & l
\end{array} \right\|; \qquad |\rho E - L| = (\rho - l)^\lambda
$$

et

$$L(z;w)=l\sum_{j=1}^{j=\lambda} z_j w_j+\sum_{j=1}^{j=\lambda-1} z_{j+1} w_j$$
$$=lE(z;w)+w_1 z_2+\ldots+w_{\lambda-1} z_\lambda.$$

Les 2λ variables $z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_\lambda, w_1, \ldots, w_j, \ldots, w_\lambda$ sont rangées dans un ordre bien défini.

On pourra sans ambiguïté parler de la *première*, ou de la *dernière*, des variables z ou w.

Introduisons le symbole $\chi(s)$ tel que

$$\chi(s)=\begin{cases} 1 \text{ pour } s \geqq 0 \\ 0 \text{ pour } s<0 \end{cases}.$$

Posons $L=lE+\Lambda$. On aura, pour la substitution Λ,

$$\Lambda=|\,z_j \quad z_{j+1}\chi(\lambda-1-j)\,|,$$
$$\Lambda^r=|\,z_j \quad z_{j+r}\chi(\lambda-r+j)\,|,$$

et enfin

$$\Lambda^r=0$$

pour $r \geqq \lambda$.

15° Soient $(\rho-a)^{\alpha_0}, \ldots, (\rho-a)^{\alpha_{k-1}}$ les k successifs fournis par la racine a de $\mathfrak{D}$. Les α sont rangés en ordre non croissant

$$\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \ldots \geqq \alpha_{k-1}.$$

Je rangerai dans un même *échelon* les successifs et les matrices partielles de l'hypersystème (a) de a, qui ont même valeur pour l'exposant successif α. L'échelon sera la valeur commune de ces exposants. La suite des échelons ne peut évidemment être que décroissante.

16° Les notations du 14° sont fidèlement maintenues dans la suite et on ne les rappellera plus.

CHAPITRE II.

POINTS ET PLANS FONDAMENTAUX, DISTINCTS OU CONFONDUS.

17° Soit un point x (plan u) de l'espace $\mathfrak{C}$. Les plans u (points x) qui avec ce point (ce plan) forment des éléments du connexe $\mathfrak{A}$, $A(x, u) = 0$, sont fournis par deux équations

$$(1) \qquad 0 = E(x; u)$$

$$(2) \qquad 0 = A(x; u)$$

et sont ainsi au nombre de ∞^{n-3}.

Si les deux équations (1) et (2) ne sont pas distinctes, on aura, *par définition*, affaire à un *point fondamental* ξ (*plan fondamental* η).

Un point fondamental ξ sera défini, si l'on pose

$$A_i(x) = \frac{\partial A(x; u)}{\partial u_i},$$

par les conditions :

$$\rho\xi_i = A_i(\xi), \qquad \text{ou} \qquad P[\xi_i] = 0,$$

où $P = \rho E - A$ et ρ désigne la valeur commune des rapports

$$\frac{A_i(\xi)}{\xi_i}.$$

Pareillement un plan fondamental sera donné, pour

$$\mathcal{A}_i(u) = \frac{\partial A(x, u)}{\partial x_i},$$

par $\rho\eta_i = \mathcal{A}_i(\eta)$, ou $(\rho E - A')[\eta_i] = 0$, $A' =$ transposée de A [1].

18° Les n équations $P[\xi_i] = 0$, ou symboliquement

$$P[\xi] = 0,$$

doivent être compatibles; d'où

$$(1) \qquad 0 = |P| = |\rho E - A| = \Delta.$$

ρ est une racine de l'équation caractéristique ω de A.

Faisons, par exemple, $\rho = a$ et voyons comment les conditions (1) se traduisent sur une matrice partielle quelconque L (14°).

Si $l \neq a$, $|aE - L| = (a - l)^\lambda \neq 0$; les conditions

$$\Lambda[z] = (aE - L)[z] = 0$$

donnent simplement $z_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, \lambda$.

Si $l = a$, les conditions $\Lambda[z] = 0$ deviennent

$$0 = z_2 = \ldots = z_\lambda; \qquad z_1 = \text{arbitr.}$$

19° En résumé : *pour avoir tous les fondamentaux* ξ_a *fournis par la racine* a *de l'équation caractéristique, il faut et il suffit :*

I. *Dans une matrice partielle n'appartenant pas à l'hypersystème* (a), *d'annuler toutes les variables;*

II. *Dans une matrice partielle appartenant à l'hypersystème* (a), *d'annuler toutes les variables, sauf la première;*

---

(1) Postérieurement à la rédaction du présent Mémoire, j'ai reconnu (1905) que la définition du point fondamental ξ pouvait être formulée autrement, de façon à se prêter mieux à une généralisation intéressante. Les conditions $\rho\xi_i = A_i(\xi)$ expriment une *dépendance linéaire* entre le point ξ et son point-image $A[\xi]$ par la collinéation A. La généralisation consiste à introduire une dépendance linéaire entre les h points ξ, $A[\xi]$, ..., $A^{h-1}[\xi]$. Je compte publier prochainement les résultats obtenus dans cet ordre d'idées.

III. *D'attribuer toutes les valeurs possibles, non simultanément nulles, aux premières variables des matrices partielles appartenant à* (a).

Cette première variable de chaque matrice appartenant à (a) se nommera le *paramètre fondamental* afférent à la matrice considérée.

La racine a donne k successifs, k matrices partielles pour (a) et k paramètres fondamentaux.

Il y aura donc ∞^{k-1} *points fondamentaux* ξ_a. Ces ξ_a formeront une variété Ξ_a à $k-1$ dimensions, *variété fondamentale.*

Particularisant tels ou tels paramètres fondamentaux, on définira, à volonté, dans Ξ_a, telles ou telles sous-variétés.

Par exemple, on pourra annuler tous les paramètres fondamentaux, qui figurent dans les matrices des échelons (15°) inférieurs à un échelon donné ε. On aura, laissant arbitraires les paramètres fondamentaux restants, une sous-variété bien définie, afférente à l'échelon ε.

20° Les plans fondamentaux η_a, fournis par la racine a de ϖ, s'obtiennent exactement de la même façon, à une particularité près. Le rôle du paramètre fondamental est joué par les *dernières* variables des différentes matrices partielles appartenant à l'hypersystème (a).

Il y aura encore k paramètres fondamentaux et une variété fondamentale H_a, à $k-1$ dimensions. On aura encore des sous-variétés afférentes à un échelon donné, etc.

21° Soit $K = \sum k$, $\sum$ étendue à tous les successifs de la matrice n-aire A, le nombre total des successifs et aussi celui des paramètres fondamentaux.

Tous les points fondamentaux ξ *sont sur une même variété à* $K-1$ *dimensions.*

Pour avoir les points fondamentaux ξ_a, *fournis par la*

racine a, il faut et il suffit d'annuler tous les paramètres fondamentaux ne provenant point de l'hypersystème (a).

L'énoncé est le même pour les plans fondamentaux η et η_a.

22° Quelle est la disposition mutuelle des ξ et des η?

Soient a et b deux racines distinctes de ϖ. On s'assure aisément que : *tout plan fondamental* η_b *passe par tout point fondamental* ξ_a.

La relation mutuelle des ξ_a et des η_a est un peu plus compliquée.

Si l'hypersystème (a) ne contient pas de successifs simples, alors, dans chaque matrice partielle, la première et la dernière variables sont différentes. Alors, comme on le voit de suite : *tout plan* η_a *passe par tout point* ξ_a.

S'il existe dans (a) un ou plusieurs successifs simples, alors dans les matrices partielles correspondantes il n'y a qu'une seule variable. Cette dernière est paramètre fondamental aussi bien pour les η_a que pour les ξ_a. Le résultat précédent ne subsiste plus. Pour un ξ_a donné il n'y a plus que certains η_a qui passent par ce point. Il faut annuler encore les paramètres fondamentaux qui proviennent des successifs simples.

23° Reprenons (18°) la relation symbolique

$$\mathrm{P}_a[\xi] = (a\mathrm{E} - \mathrm{A})[\xi] = 0$$

qui définit les ξ_a. Introduisons les n quantités

$$\mathrm{B}_i(x) = \rho x_i - \mathrm{A}_i(x) = (\rho\mathrm{E} - \mathrm{A})[x_i] = \mathrm{P}_\rho[x_i] = \mathrm{P}[x_i],$$

ou, symboliquement, $\mathrm{P}[x]$. Pour $\rho = a$ et $x = \xi_a$, les B_i ont un zéro commun.

24° Égalons x_i et ρ à des fonctions holomorphes d'une variable t, en posant

$$(0)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_i = \xi_i + t\xi'_i + \ldots + \dfrac{t^r}{r!}\xi_i^{(r)} + \ldots \\ \rho = a + t\rho' + \ldots \end{array}\right\},$$

de façon que, pour $t = 0$,

$$\xi_i^{(r)} = \frac{d^r x_i}{dt^r}, \qquad \rho^{(r)} = \frac{d^r \rho}{dt^r}.$$

Quand t varie, à partir de $|t| = 0$, dans les limites de convergence des séries, le point x décrit un itinéraire $\mathfrak{W}$, passant par le fondamental ξ.

Je supposerai que le point ξ est un point *simple* de $\mathfrak{W}$. Autrement dit, la tangente en ξ à $\mathfrak{W}$ sera unique et bien déterminée; un au moins des ξ'_i ne sera pas nul. Soit, par exemple, $\xi'_j \neq 0$. Alors on aura

$$(1) \qquad y_j = x_j - \xi_j = t\{\xi'_j + t(\ldots)\}.$$

En vertu de théories bien connues (Weierstrass, etc.), l'équation (1) en t n'aura, pour $|y_j|$ et $|t|$ assez petits, qu'*une seule* racine. Cette racine s'évanouit avec $x_j - \xi_j$.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant : *A une valeur du paramètre t correspond, sur* $\mathfrak{W}$, *un seul point x. Réciproquement, pour un point x, pris sur* $\mathfrak{W}$ *assez près de ξ, on n'obtient qu'une seule valeur de t, à module assez petit.*

Supposons, en particulier, $\rho' \neq 0$. Alors, pour $t = 0$, $\rho = a$, $x_i = \xi_i$; enfin $\dfrac{dx_i}{d\rho} = \dfrac{\xi'_i}{\rho'}$. Une au moins de ces dernières n quantités est $\neq 0$. Il est licite, sans rien changer aux résultats ci-dessus, de supposer que la variable t est précisément $\rho - a$. Cela revient à faire, dans (0), $\rho' = 1$, $\rho^{(r)} = 0$ pour $r > 1$.

25° Soit $Q(x_1, \ldots, x_n; \rho)$ un polynome en x_i et ρ qui devient une fonction $\varpi(t)$ sous le bénéfice des formules (0) du 24°. Supposons que ϖ possède en $t = 0$ un zéro K-uple, c'est-à-dire que le développement de $\varpi(t)$ débute par t^K. Eu égard aux explications du 24°, il est licite de dire que *la fonction* Q *possède, au point fondamental ξ et sur l'itinéraire* $\mathfrak{W}$, K *zéros confondus.*

Prenons pour Q une quelconque des fonctions

$$B_i = \rho x_i - A_i[x] = P[x_i] = P_\rho[x_i],$$

du 23°, qui deviennent $q_i(t)$.

Si tous les q_i ont un zéro K-uple en $t = 0$, on peut dire que *le connexe* $\mathfrak{A}$ *possède, sur l'itinéraire* $\mathfrak{W}$, K *points fondamentaux infiniment voisins du point* ξ ou que ξ *est un point fondamental* K-*uple du connexe* ou qu'*en* ξ, K *points consécutifs de* $\mathfrak{W}$ *sont fondamentaux*, etc.

26° Je vais chercher à construire $\mathfrak{W}$, dans les conditions du 24° (ξ point simple sur $\mathfrak{W}$), de façon à obtenir pour le fondamental ξ un *degré de multiplicité* K, *aussi élevé que possible*.

Il faut évidemment et il suffit que, pour $t = 0$,

$$\frac{d^r q_i}{dt^r} = 0, \qquad r = 0, 1, \ldots, K - 1,$$

avec un, au moins, des $\frac{d^K q_i}{dt^K} \neq 0$.

27° Par simple différentiation on a

$$\frac{d^r q_i}{dt^r} = P_\rho\left[\frac{d^r x_i}{dt^r}\right] + \sum_{s=1}^{s=r} \frac{r!}{s!\,(r-s)!}\,\frac{d^s \rho}{dt^s}\,\frac{d^{r-s} x_i}{dt^{r-s}},$$

$$r = 0, 1, \ldots, K - 1.$$

Faisons $t = 0$, il viendra $\rho = a$, $x = \xi_a$ et (26°).

$$(\Omega) \qquad 0 = P_a[\xi_i^{(r)}] + \sum_{s=1}^{s=r} \frac{r!}{s!\,(r-s)!}\,\rho^{(s)}\xi_i^{(r-s)}.$$

Les équations Ω considérées comme fournissant les inconnues ρ', ρ'', ..., $\rho^{(s)}$, ..., $\rho^{(r)}$ sont compatibles par hypothèse. $\rho^{(r)}$ a pour coefficients les ξ_i, avec $\xi_\alpha \neq 0$. On peut donc exprimer $\rho^{(r)}$ à l'aide de $\rho^{(r-1)}$, ..., ρ'', ρ', c'est-à-dire finalement à l'aide de ρ' seulement.

ρ' lui-même est donné par

$$P_a[\xi_i'] + \xi_i \rho' = 0.$$

ρ' ne peut être zéro, dès qu'une des quantités $P_a[\xi_i']$ est $\neq 0$, ou, symboliquement, $P_a[\xi'] \neq 0$.

28° L'équation symbolique

$$P_a[\xi^{(s)}] = 0, \qquad \{s = 0, 1, \ldots, r-1\}$$

exprime que les r points

$$\xi, \xi', \ldots, \xi^{(s)}, \ldots, \xi^{(r-1)}$$

sont situés sur la variété fondamentale Ξ_a (19°), afférente à la racine a de l'équation caractéristique ⓓ. L'itinéraire 𝖂 possède r points consécutifs sur Ξ_a.

On peut évidemment rendre K (26°) aussi élevé qu'on voudra et même infini, en maintenant assez longtemps sur Ξ_a l'itinéraire 𝖂.

J'écarterai cette solution banale du problème posé au 26° et je supposerai que 𝖂 n'a en ξ qu'*un seul* point sur Ξ_a. Alors (27°) il sera licite de faire

$$P_a[\xi'] \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \rho' \neq 0.$$

Par suite (24°, *in fine*), on peut poser simplement

$$t = \rho - a$$

et faire $\rho^{(s)} = 0$, pour $s > 1$, $\rho' = 1$.

C'est ce qu'on admettra dorénavant.

29° Alors, le système Ω du 27° devient

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{c} P_a[\xi_i^{(r)}] + r\xi_i^{(r-1)} = 0 \\ 0 < r < K; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right\}.$$

On en déduit, par un calcul facile,

$$(\Theta) \qquad \left\{ \begin{array}{c} P_a^r[\xi_i^{(r)}] = (-1)^r r! \xi_i \\ 0 < r < K, \qquad 0 < i \leq n \end{array} \right\}.$$

La formule (Θ) résout le problème du 26°. Voyons comment elle se traduit sur les λ variables z_j, $\{0 < j \leq \lambda\}$, d'une composante λ-aire L (14°).

Définition. — L *sera* inactive *ou* active *pour un fondamental* ξ, *suivant que le paramètre fondamental* Z *sera, pour* ξ *et pour* L, *nul ou différent de zéro.*

30° Soient ζ_j les valeurs des z_j pour le fondamental ξ_a. On aura évidemment (14° et 19°)

$$\zeta_j = Z\chi(1-j).$$

Posons

$$z_j = \zeta_j + t\zeta'_j + \ldots + \frac{t^r}{r!}\zeta_j^{(r)} + \ldots.$$

On a (14°) $L = lE + A$. Sur les z_j, la substitution

$$P_a = aE - A$$

se traduit par la substitution

$$D = (a-l)E - A.$$

Les formules (Θ) deviennent

$$(0)' \qquad D^r[\zeta_j^{(r)}] = (-1)^r r! Z\chi(1-j).$$

Si L appartient à l'hypersystème (a), $D = -A$.

Eu égard à l'expression de A^r donnée au 14° et après départ de $(-1)^r$, il vient alors

$$(0) \qquad \zeta_{j+r}^{(r)}\chi(\lambda - j - r) = r! Z\chi(1-j), \quad r < K.$$

31° Supposons d'abord la matrice L étrangère à l'hypersystème (a) qui fournit le fondamental ξ. L est forcément inactive, $Z = 0$. Alors $|D| = (a-l)^\lambda \neq 0$ et $(0)'$ fournit immédiatement $\zeta_j^{(r)} = 0$ pour $r < K$ et $\zeta_j^{(r)} =$ arbitraire pour $r \geq K$. La portion de l'itinéraire $\mathfrak{W}$, afférente à la matrice L, résultera donc des formules

$$(0) \qquad z_j = t^K\psi_j(t), \qquad \psi_j = \text{développement arbitraire}.$$

On profitera de ce que les $\psi_j(t)$ sont arbitraires pour les biffer tous. Les z_j seront nuls sur toute la portion considérée de l'itinéraire $\mathfrak{W}$.

La matrice L, étrangère à l'hypersystème (a), ne nous renseignera pas sur la valeur de K.

32° Prenons maintenant, dans l'hypersystème (a), une composante L *active* $Z \neq 0$. Si, dans les formules (0) du (30°), on fait $j = 1$, il vient

$$(1) \qquad \zeta_{r+1}^{(r)} \chi(\lambda - 1 - r) = r!Z.$$

Comme $Z \neq 0$,

$$\chi(\lambda - 1 - r) \neq 0$$

et

$$\lambda - 1 - r \geqq 0, \qquad r \leqq \lambda - 1.$$

Mais (27°) $r = 0, 1, 2, \ldots, K - 1$; donc $K \leqq \lambda$.

L'entier K *ne peut dépasser l'ordre* λ *d'une composante active et* K *est l'ordre minimum des composantes actives.*

Le fondamental ξ étant connu, K s'en déduit sans ambiguïté et est désormais considéré comme connu.

33° Après avoir calculé K, nous construirons les séries du 30°,

$$z_j = z_j(t) = \zeta_j + t\zeta'_j + \ldots; \qquad t = \rho - a \quad (28°).$$

A cet effet, exprimons que le développement en t de l'expression (23°)

$$B_i(x) = \rho x_i - A_i(x)$$

débute par un terme en t^K.

Pour les variables z_j de la composante λ-aire

$$L = aE + A \quad (14°),$$

de l'hypersystème (a) considéré, les expressions B_i sont, puisque $\rho - a = t$,

$$\mathfrak{B}_j(z) = tz_j - z_{j+1}\chi(\lambda - 1 - j), \qquad \{j = 1, 2, \ldots, \lambda\}.$$

On a donc à construire les $z_j(t)$ de façon à avoir

$$(0) \qquad \mathfrak{B}_j(z) = -t^K f_j(t);$$

d'où, par un calcul facile, on tire

$$(1) \qquad \begin{cases} z_j = z_1 t^{j-1} + t^K F_j(t) \\ F_j = f_{j-1} + t f_{j-2} + \ldots + t^{j-2} f_1. \end{cases}$$

Si $K < \lambda$, on pourra faire $j > K$. Alors, pour un pareil j et dans la formule (1), le terme $z_1 t^{j-1}$ se fond dans le terme $t^K F_j$. On écrira donc

$$z_j = z_1 t^{j-1} \chi(K - j) + t^K \Phi_j(t).$$

Mais, Z étant le paramètre fondamental,

$$z_1 = Z + t\theta(t);$$

par suite

$$(2) \qquad z_j = Z t^{j-1} \chi(K - j) + t^j \theta \chi(K - j) + t^K \Phi_j.$$

Sous le bénéfice des conditions (2), l'expression $\mathfrak{B}_j$ du 33° devient

$$t^K \{ t\Phi_j - \Phi_{j+1} \}.$$

Les conditions (0), savoir $\mathfrak{B}_j(t) = t^K(\ldots)$, n'assujettissent à aucune relation les séries entières Φ_j, θ, qui restent arbitraires.

On est finalement conduit à la formule

$$(3) \qquad \left\{ \begin{matrix} z_j = t^{j-1} Z \chi(K - j) + t^{\tau_j} \varphi_j(t) \\ j = 1, 2, \ldots, \lambda \end{matrix} \right\},$$

où les $\varphi_j(t)$ sont des séries entières en t, *arbitraires*, tandis que

$$\tau_j = j + (K - j)\chi(j - K).$$

34° Tenons maintenant compte de la relation

$$1 = x_0 = \sum_i e_i x_i,$$

qui donne les valeurs absolues des coordonnées ponctuelles homogènes. Se reportant au 24° [formule (o)], on devra avoir

$$1 = \xi_0 = \sum_i e_i \xi_i, \qquad \xi_0^{(s)} = \sum_i e_i \xi_i^{(s)} = 0,$$
$$s > 0.$$

Nommons ε_j, $j = 1, 2, \ldots, \lambda$, les coefficients e relatifs aux variables z_j de la matrice partielle λ-aire L. On aura

$$(4) \qquad 1 = x_0 = \sum \sum \varepsilon_j z_j,$$

où le premier $\sum$ s'étend aux diverses matrices partielles, telles que L.

Il est licite de choisir les e_i de façon que, dans chaque matrice telle que L, le *premier* coefficient ε_1 soit seul différent de zéro. A la vérité, on relègue ainsi dans le plan de l'infini tous les points x, pour lesquels chaque *première* variable z_1 d'une matrice composante est zéro. Mais cela est sans inconvénient pour l'étude des points fondamentaux. Pour un pareil point (19°), les diverses *premières* variables sont les valeurs des paramètres fondamentaux et ne s'évanouissent pas simultanément.

Il viendra

$$1 = \sum \varepsilon_1 Z$$

pour le point fondamental considéré ξ_a lui-même.

35° Satisfaisons maintenant à la condition $x_0 = 1$ pour un point de l'itinéraire $\mathfrak{W}$. On devra avoir, par la formule (3) du 33°,

$$1 = \sum \varepsilon_1 Z + \sum t \varepsilon_1 \varphi_1(t).$$

Or déjà $1 = \sum \varepsilon_1 Z$. Il suffira de faire $\varphi_1 = 0$. Les autres développements φ ne sont assujettis, par le fait de $x_0 = 1$, à

aucune condition *et restent arbitraires.* On en profitera pour les biffer tous.

Les formules (3) deviennent alors

$$(5) \qquad z_j = t^{j-1} Z\chi(K-j) \qquad \{j = 1, 2, \ldots, \lambda\}$$

et donnent, sous forme définitive, la portion de l'itinéraire $\mathfrak{W}$ afférente à la matrice composante L.

La formule (5) du 35° s'applique de même, avec $Z = 0$, à une composante inactive de l'hypersystème (a) et aussi (31°) à une composante L, non comprise dans l'hypersystème a.

Cette formule (5) est absolument générale.

36° La formule (5), appliquée aux diverses composantes L, définit une courbe unicursale de degré $K - 1$.

37° Toute la théorie précédente des fondamentaux confondus ou infiniment voisins se résume en une proposition unique.

Théorème. — *Soit* ξ_a *un point fondamental fourni par la racine* a *de l'équation caractéristique* $\mathfrak{D}$. *A* ξ_a *correspondent sans ambiguïté un entier* K (*choisi dans la suite des exposants successifs* $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$) *et une courbe unicursale* $\mathfrak{C}_{K-1}$, *de degré* $K - 1$, *passant par* ξ_a. *Il y a, sur la courbe,* K *points fondamentaux confondus en* ξ_a.

38° Les plans fondamentaux confondus s'étudient par des procédés analogues. On a une proposition parallèle.

Théorème. — *A chaque plan fondamental* η_a *correspondent sans ambiguïté un entier* K' *et une développable de classe* $K' - 1$ *tangente à* η_a. *La développable est tangente à* K' *plans fondamentaux, confondus en* η_a.

39° Soient w_j $\{j = 1, 2, \ldots, \lambda\}$ les λ variables planaires afférentes à une matrice partielle λ-aire L. Le paramètre fondamental W est la valeur de la *dernière* variable w_λ (20°).

K′ s'obtient en considérant les matrices L où, pour η_a, $W \neq 0$.

La portion de la développable, qui correspond à la matrice L, s'obtient par des formules analogues aux formules (5) du 35°. Les $\lambda - K'$ premiers w sont nuls, comme étaient nuls, au 35°, les $\lambda - K$ derniers z.

40° Il n'est pas inutile de vérifier *a posteriori* tous les résultats précédents et de montrer que les développements en t (25°)

$$q_i(t) = \rho x_i - A[x_i] = B_i$$

débutent par un terme en t^K.

En ce qui concerne la composante λ-aire L, l'expression, à considérer au lieu de $q_i(t)$, est (33°)

$$\mathfrak{P}_j(t) = t z_j - z_{j+1}\chi(\lambda - 1 - j).$$

Tenons compte de la formule (5) du 35°; il vient

$$\mathfrak{P}_j(t) = Z t^j \varpi_j, \qquad \varpi_j = \chi(K - j) - \chi(K - j - 1)\chi(\lambda - 1 - j).$$

Si $Z = 0$, $\mathfrak{P}_j = 0$. Si la composante est active, $Z \neq 0$, l'entier K ne peut dépasser (32°) l'ordre λ de L.

Faisons $1 \leqq j \leqq K - 1$. Les trois entiers $\lambda - 1 - j$, $K - 1 - j$ et $K - j$ ne sont pas négatifs et ont leurs χ égaux à l'unité. $\varpi_j = 0$, $\mathfrak{P}_j = 0$.

Faisons $j = K$. Alors $K - j$ est nul, $K - j - 1$ est négatif. $\varpi_j = 1$, $\mathfrak{P}_K = Z t^K$.

Faisons enfin $K + 1 \leqq j \leqq \lambda$. Les entiers $K - j$ et $K - j - 1$ sont négatifs, leurs χ sont nuls, $\varpi_j = 0$ et $\mathfrak{P}_j = 0$.

Un $\mathfrak{P}_j$ nul peut être considéré comme divisible par t^K. Donc, dans toutes les hypothèses,

$$\mathfrak{P}_j = t^K(\ldots\ldots), \qquad \mathfrak{P}_K = t^K Z,$$

$Z = \text{const.} \neq 0$.

C. Q. F. D.

CHAPITRE III.

COURBES $\mathfrak{X}$ ET DÉVELOPPABLES $\mathfrak{V}$.

41° Considérons toujours le connexe $\mathfrak{A}$, ayant pour équation

$$A(x, u) = 0.$$

Introduisons deux figures nouvelles qui se correspondent dualistiquement.

Une courbe $\mathfrak{X}$ sera définie par la propriété suivante : la tangente au point x passe par le point dont les coordonnées sont proportionnelles à

$$A_i(x) = \frac{\partial A(x, u)}{\partial u_i}.$$

Une *développable* $\mathfrak{V}$ sera définie par la propriété suivante : l'intersection du plan tangent u avec le plan tangent infiniment voisin est située sur le plan dont les coordonnées sont proportionnelles à

$$\mathcal{A}_i(u) = \frac{\partial A(x, u)}{\partial x_i}.$$

42° Une courbe (développable) est, par définition, le lieu des points x (plans u) dont les coordonnées sont fonctions d'*une* variable s.

L'équation différentielle des courbes $\mathfrak{X}$ sera

$$(X) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{ds} = x_i\alpha(s) + \beta(s)A_i(x) \\ A_i(x) = A[x_i] = \dfrac{\partial A(x, u)}{\partial u_i}. \end{cases}$$

Celle des développables $\mathfrak{V}$ sera

$$(\mathrm{U})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du_i}{ds} &= u_i\gamma(s) + \delta(s)\mathcal{A}_i(u) \\ \mathcal{A}_i(u) &= \mathrm{A}'[u_i] = \frac{\partial \mathrm{A}'(x, u)}{\partial x_i} \end{aligned}\right\}.$$

On a supposé, d'ailleurs, la valeur absolue des coordonnées x_i ou u_i fixée par les procédés du 1°. De plus $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$, $\delta(s)$ sont des fonctions de s, encore inconnues, tout comme les fonctions $x_i(s)$ et $u_i(s)$ qui définiront $\mathfrak{X}$ ou $\mathfrak{V}$

43° Simplifions d'abord l'équation différentielle X des $\mathfrak{X}$. Posons

$$x_i = y_i\theta(s).$$

Il viendra

$$\frac{dy_i}{ds} = y_i\left\{\alpha - \frac{d\theta}{\theta\, ds}\right\} + \beta \mathrm{A}_i(y).$$

Posons

$$\theta = \theta_0 e^{\int \alpha(s)ds}, \qquad \theta_0 = \text{const.}$$

Il viendra simplement

$$\frac{dy_i}{\mathrm{A}_i(y)} = \beta(s)\, ds.$$

Posons

$$t - t_0 = \int \beta(s)\, ds, \qquad t_0 = \text{const.}$$

Le système différentiel X s'écrira définitivement

$$(\mathrm{Y})\qquad \frac{dy_i}{dt} = \mathrm{A}_i(y) = \mathrm{A}[y_i].$$

Posons de même

$$u_i = v_i\varpi(s),$$

avec

$$\varpi = \varpi_0 e^{\int \gamma(s)ds}, \qquad \varpi_0 = \text{const.},$$

et

$$dt = \delta(s)\, ds,$$

il viendra

$$(\mathrm{V})\qquad \frac{dv_i}{dt} = \mathcal{A}_i(v) = \mathrm{A}'[v_i].$$

Passons à l'intégration des systèmes différentiels Y et V. Cette intégration assurera la connaissance des courbes $\mathfrak{X}$ et des développables $\mathfrak{V}$. Si l'on a, en effet, en vertu de ladite intégration,

$$y_i = y_i(t), \qquad v_i = v_i(t),$$

$\mathfrak{X}$ s'obtiendra par les n équations

$$(1) \qquad \frac{x_1}{y_1(t)} = \frac{x_2}{y_2(t)} = \ldots = \frac{x_n}{y_n(t)} = \frac{1}{y_0(t)},$$

et $\mathfrak{V}$ s'obtiendra par les n équations

$$(2) \qquad \frac{u_1}{v_1(t)} = \ldots = \frac{u_n}{v_n(t)} = \frac{1}{v_0(t)}$$

sans qu'on ait à se préoccuper des fonctions α, β, γ, δ, θ, ϖ de la variable s.

44° Voyons de quelle façon les relations (Y) se traduisent sur les λ variables z_j de la matrice composante λ-aire L, $L = lE + \Lambda$, introduite au 14° [1], savoir telle que

$$L(z, w) = lE(z, w) + w_1 z_2 + \ldots + w_{\lambda-1} z_\lambda.$$

Il viendra

$$z'_j = \frac{dz_j}{dt} = L[z_j] = (lE + \Lambda)[z_j].$$

Posons

$$z_j = e^{lt}\zeta_j;$$

alors, après départ de e^{lt}, on aura simplement

$$\zeta'_j = \Lambda[\zeta_j].$$

Alors, par un calcul simple,

$$\zeta_j^{(r)} = \frac{d^r\zeta_j}{dt^r} = \Lambda^r[\zeta_j],$$

---

[1] Plus exactement, les z_j désigneront celles des variables y_i qui appartiennent à la matrice L.

et

$$\zeta_1^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda \zeta_1}{dt^\lambda} = 0,$$

car

$$\Lambda^\lambda = 0 \quad (14^\circ).$$

Ensuite, puisque (14°) $\zeta'_j = \Lambda[\zeta_j] = \zeta_{j+1}\chi(\lambda - 1 - j)$,

$$\zeta_1 = \sum_{r=0}^{r=\lambda-1} c_r t^r = \text{polynome arbitraire en } t, \text{ de degré } \lambda - 1 = \varphi(t).$$

$$\zeta_2 = \varphi'(t), \qquad \zeta_3 = \varphi''(t), \ \ldots, \qquad \zeta_j = \varphi^{(j-1)}(t),$$

$$\zeta_\lambda = \varphi^{(\lambda-1)}(t) = \text{const.}$$

On écrira, un peu autrement,

$$z_j = e^{lt}\varphi^{(j-1)}(t), \qquad \frac{\partial^{j-1}\varphi}{\partial t^{j-1}} = \varphi^{(j-1)}(t),$$

$$\varphi(t) = \sum_{r=0}^{r=\lambda-1} c_r \frac{t^r}{r!}, \qquad c_r = \text{arbitr.}$$

45° Pour obtenir la courbe $\mathfrak{X}$, il faut avoir égard à la condition

$$x_0 = \sum_i e_i x_i = 1.$$

On choisira les coefficients e comme au 34°. Autrement dit, parmi les coefficients ε_j, relatifs à la matrice L, ε_1 sera seul différent de zéro. Alors

$$1 = x_0 = \sum \varepsilon_1 z_1; \quad \text{et l'on écrira} \quad \sum \varepsilon_1 e^{lt}\varphi(t) = \Phi,$$

$\sum$ s'étendant aux diverses composantes.

Cela posé, la portion de la courbe $\mathfrak{X}$, afférente à la composante L, s'obtiendra par les formules que voici :

$$(\mathfrak{X}) \qquad z_j = \frac{e^{lt}\varphi^{(j-1)}(t)}{\Phi}.$$

46° La développable $\mathfrak{V}$ s'obtiendra par un procédé analogue. Viendront les formules que voici (*voir* 39°) :

$$(\mathfrak{V}) \qquad w_j = \frac{e^{lt}\psi^{(\lambda-j)}(t)}{\sum \gamma_\lambda e^{lt}\psi(t)} = \frac{\dots}{\Psi},$$

où

$$\psi(t) = \sum_{r=1}^{r=\lambda-1} g_r \frac{t^r}{r!}, \qquad g_r = \text{arbitr.},$$

à condition que l'on ait

$$1 = u_0 = \sum \gamma_\lambda w_\lambda,$$

{les γ étant analogues aux ε du 45°}, $\sum$ s'étendant aux diverses composantes.

47° Les courbes $\mathfrak{X}$ (développables $\mathfrak{V}$) ont, avec les points (plans) fondamentaux des relations étroites que nous allons étudier.

Reprenons les équations différentielles du 42° :

$$(\text{X}) \qquad \frac{dx_i}{ds} = x_i \alpha(s) + \beta(s) \text{A}_i(x),$$

$$(\text{U}) \qquad \frac{du_i}{ds} = u_i \gamma(s) + \delta(s) \mathcal{A}_i(u).$$

Supposons d'abord que le point x (plan u) n'est pas fondamental. Alors sont distincts les deux points x et A$[x]$, ce dernier ayant les $\text{A}_i(x)$ pour coordonnées. De même sont distincts les deux plans u et A$'[u]$, ce dernier ayant les $\mathcal{A}_i(u)$ pour coordonnées.

Les seconds membres des relations (X) ou (U) ne s'évanouissent pas simultanément.

Par conséquent :

I. *Par un point x de l'espace non fondamental passe une et une seule courbe $\mathfrak{X}$.*

II. *A un plan u de l'espace non fondamental est tangente une et une seule développable $\mathfrak{V}$.*

48° Lemme. — *Si, sur une courbe* $\mathfrak{X}$ *(développable* $\mathfrak{V}$*), le point (plan) courant tend vers un point fondamental* ξ *(plan fondamental* η*), la variable* t *des formules* ($\mathfrak{X}$) *ou* ($\mathfrak{V}$) *des* 45° *et* 46° *ne peut rester finie.*

Si t reste finie, on peut faire, sans restreindre la généralité, $t = 0$. Alors il vient, pour le point ξ,

$$z_j = \frac{\varphi^{(j-1)}(0)}{\sum \varepsilon_1 \varphi(0)},$$

pour le plan η,

$$w_j = \frac{\psi^{(\lambda-j)}(0)}{\sum \gamma_\lambda \psi(0)},$$

et les dénominateurs ne peuvent s'évanouir qu'avec tous les numérateurs, puisque ξ ou η ont des coordonnées finies. Comme les ε_1 et γ_λ sont des constantes numériques quelconques, il faudrait, dans cette éventualité, avoir, *pour chaque matrice composante*,

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(\lambda-1)}(0) = 0,$$
$$\psi(0) = \psi'(0) = \ldots = \psi^{(\lambda-1)}(0) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(t) \equiv 0, \qquad \psi(t) \equiv 0,$$

ce qui est évidemment absurde.

Nommons donc Φ_0 et Ψ_0 les constantes non nulles auxquelles se réduisent, pour $t = 0$, les deux dénominateurs Φ et Ψ de z_j et w_j.

On devra avoir, eu égard aux théories du Chapitre II,

$$\text{pour } \xi \left\{ \begin{aligned} z_1 &= \frac{\varphi(0)}{\Phi_0} = Z = \text{paramètre fondamental}, \\ z_j &= \frac{\varphi^{(j-1)}(0)}{\Phi_0} = 0 \quad \text{et} \quad \varphi^{(j-1)}(0) = 0; \end{aligned} \right.$$

$$\text{pour } \eta \left\{ \begin{aligned} w_\lambda &= \frac{\psi(0)}{\Psi_0} = W = \text{paramètre fondamental}, \\ w_j &= \frac{\psi^{\lambda-j}(0)}{\Psi_0} = 0 \quad \text{et} \quad \psi^{(\lambda-j)}(0) = 0. \end{aligned} \right.$$

De là

$$\varphi(t) = \Phi_0 Z = \text{const.}, \qquad \psi(t) = \Psi_0 W = \text{const.}$$

Alors les formules ($\mathfrak{X}$) et ($\mathfrak{V}$) deviennent

$$z_j = \frac{e^{lt}\Phi_0 Z \chi(1-j)}{\sum \varepsilon_1 \Phi_0 Z e^{lt}}, \qquad w_j = \frac{e^{lt}\Psi_0 W \chi(j-\lambda)}{\sum \gamma_\lambda \Psi_0 W e^{lt}}$$

avec (14°) $\chi(s) = 0$ ou 1 suivant que $s < 0$ ou $s \geq 0$.

Soit (l) l'hypersystème qui correspond à la racine l de l'équation caractéristique. Les paramètres fondamentaux, qui définissent le point fondamental ξ ou le plan fondamental η, sont nuls pour toutes les composantes qui n'appartiennent point à (l), si l'on suppose (ce que nous ferons pour fixer les idées) que ξ et η sont fournis par la racine l.

Les sommes dénominateurs

$$\Phi = \sum \varepsilon_1 \Phi_0 Z e^{lt}, \qquad \Psi = \sum \gamma_\lambda \Psi_0 W e^{lt}$$

ne comprennent plus que des composantes actives, $Z \neq 0$ ou $W \neq 0$, qui appartiennent forcément à l'hypersystème (l) et l'exponentielle e^{lt} vient en facteur. Cette exponentielle disparaît haut et bas dans les fractions qui donnent z_j et w_j.

Alors z_j et w_j sont des constantes. La courbe $\mathfrak{X}$ (développable $\mathfrak{V}$) se réduit à un point (plan) fixe, qui est évidemment le point (plan) fondamental considéré.

C'est là un cas tout particulier que nous excluons et le lemme est démontré [1].

Il faut donc étudier ce qui se passe pour $|t| = \infty$ ou pour $t^{-1} = 0$.

---

[1] Peut-être est-il à propos d'expliquer que, dans le présent Chapitre, e^{lt} n'est pas la quantité e^t, élevée à la puissance d'exposant l. Suivant l'usage, e^{lt} est l'exponentielle, fonction uniforme :

$$e^{lt} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(lt)^s}{s!}.$$

49° Voici le problème qui va nous occuper maintenant.

La portion de la courbe $\mathfrak{X}$, afférente à une composante L, d'ordre λ, dépend des λ paramètres arbitraires, qui sont les coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_{\lambda-1}$ du polynome $\varphi(t)$ (45°). Il y a, pour toutes les matrices composantes telles que L, de la matrice A, $n = \sum \lambda$ pareils paramètres. La courbe $\mathfrak{X}$ tout entière dépendra des $n - 1$ rapports de ces n paramètres.

D'autre part, $\mathfrak{X}$ passe, par hypothèse, par un certain fondamental ξ_l par exemple, fourni par la racine l de l'équation caractéristique.

Enfin, dans le plan de la variable complexe t, t devient infini (ou t^{-1} tend vers zéro) suivant un certain itinéraire $\mathfrak{w}$. Comme le point $t^{-1} = 0$ est, pour la fonction exponentielle e^t, un point singulier essentiel, le choix de $\mathfrak{w}$ n'est pas indifférent.

Tout cela posé, le problème proposé consistera à établir la dépendance mutuelle qui lie ensemble :

Le fondamental ξ_l;

L'itinéraire $\mathfrak{w}$;

Les $n - 1$ paramètres, qui définissent la courbe $\mathfrak{X}$.

50° Dans la matrice L, le degré effectif du polynome $\varphi(t)$ (45°) ne dépasse pas l'ordre λ de L diminué d'une unité, mais peut être moindre, pour une certaine courbe $\mathfrak{X}$. Ce degré se nommera *catégorie* de la matrice L, pour la courbe $\mathfrak{X}$ considérée.

51° Reprenons les formules du 45° qui donnent la portion de la courbe $\mathfrak{X}$, afférente à une matrice L. Écrivons-les un peu autrement, savoir

$$z_j^{-1} = \frac{\Phi}{e^{lt}\,\varphi^{(j-1)}(t)}.$$

Dans la somme Φ mettons en évidence :

1° Le coefficient ε_1 de la matrice L elle-même;

2° Les coefficients ε_1'' et les polynomes $f(t)$, analogues à $\varphi(t)$, des matrices autres que L, mais appartenant au même hypersystème (l) que L;

3° Les coefficients ε_1' et les polynomes $F(t)$ qui appartiennent à des matrices L′ des hypersystèmes (l'), $l' \neq l$.

On aura

$$\Phi = e^{lt}\left\{\varepsilon_1 \varphi + \sum \varepsilon_1'' f\right\} + \sum \varepsilon_1' F(t) e^{l't}$$

et

$$(o) \qquad z_j^{-1} = \varepsilon_1 \frac{\varphi}{\varphi^{(j-1)}} + \sum \varepsilon_1'' \frac{f}{\varphi^{(j-1)}} + \sum \varepsilon_1' e^{(l'-l)t} \frac{F}{\varphi^{(j-1)}}.$$

Il faut chercher la limite, pour $t = \infty$, des expressions z_j^{-1}. Les divers polynomes tels que φ, f, F, $\varphi^{(j-1)}$, ... peuvent, dans le calcul des limites, être supposés réduits à leur terme, d'exposant maximum, en t. Tout se ramène donc au calcul de

$$\Omega = \lim_{t=\infty} v, \qquad v = e^{mt} t^p,$$

où p est entier réel, tandis que m est une constante complexe quelconque.

52° Mettons en évidence les arguments et les modules, posons

$$t = \mathrm{T} e^{i\tau}, \qquad m = \mathrm{M} e^{-i\mu}. \qquad mt = \mathrm{MT} e^{i(\tau-\mu)}.$$

De là

$$|v| = \mathrm{T}^p e^{\mathrm{MT}\cos(\tau-\mu)},$$

$$\arg v = p\tau + \mathrm{MT}\sin(\tau - \mu).$$

t dans son plan s'éloigne à l'infini suivant un itinéraire $\mathfrak{w}$. La variable v, dans son plan, décrit un itinéraire V. Considérons enfin la figure ci-après, où les flèches indiquent le sens positif des axes.

$$\mathrm{O}\alpha = \mathrm{T}\cos(\tau - \mu),$$

$$\mathrm{O}\beta = \mathrm{T}\sin(\tau - \mu),$$

$$\mathrm{O}t = \mathrm{T}.$$

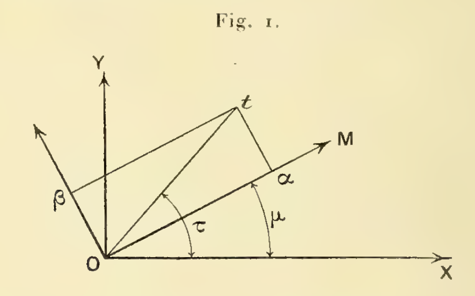
On sait que, pour m et t réels, on a, quel que soit l'entier p fini,

$$\Omega = \infty \quad \text{pour} \quad mt = +\infty,$$
$$\Omega = 0 \quad \text{pour} \quad mt = -\infty.$$

Une discussion élémentaire conduit aux résultats suivants.

Si $\mathfrak{w}$ est tel que α s'éloigne à l'infini sur OM et dans le sens positif, $|v|$ devient ∞ et $\Omega = \infty$.

Fig. 1.



Si $\mathfrak{w}$ est tel que α s'éloigne à l'infini dans le sens négatif, $|v|$ tend vers zéro et $\Omega = 0$.

Supposons que, pour un certain $\mathfrak{w}$, α tende vers α_0, à distance finie. Alors $O\alpha_0 = \lim T\cos(\tau - \mu)$ et $\cos(\tau - \mu)$ tend vers zéro; $\sin(\tau - \mu)$ tend vers ± 1; $T\sin(\tau - \mu)$ devient infini. $|\Omega| = \infty$, pour $p > 0$; $|\Omega| = 0$, pour $p < 0$. Pour $p = 0$, $|v|$ tend vers une limite finie, mais $\arg v$ est infini. L'itinéraire V de v admet un cercle asymptote ayant son centre à l'origine. Ω est indéterminée tout en restant finie.

Enfin Ω est complètement indéterminée, si, t s'éloignant à l'infini, les points α et β ne tendent vers aucune limite.

Notons que, dans la discussion précédente, où $m \neq 0$, Ω est nulle, infinie, indéterminée, mais jamais finie.

Si l'on voulait avoir une Ω finie et bien déterminée, différente de zéro, il faudrait faire

$$m = 0 \quad \text{et} \quad p = 0.$$

Alors $v = \text{const.}$

53° Soient :

$v_1, v_2, \ldots$ des expressions, en nombre fini, du type v;

$g_1, g_2, \ldots$ des constantes numériques *arbitraires;*

$\mathfrak{v}$ l'expression

$$\mathfrak{v} = g_1 v_1 + g_2 v_2 + \ldots;$$

$\bar{\mathfrak{v}}$ la limite de $\mathfrak{v}$ pour $t = \infty$. Nous admettrons comme évident l'énoncé suivant :

*Pour que $\bar{\mathfrak{v}}$ soit infinie (ou indéterminée), il faut et il suffit qu'*une *au moins des v ait une limite infinie (ou indéterminée, aucune des autres n'étant infinie).*

Pour que $\bar{\mathfrak{v}}$ soit zéro, il faut et il suffit que chacune *des v tende vers zéro.*

54° Nommons $\bar{x}$ la position limite du point courant x sur une courbe $\mathfrak{X}$, quand t devient infinie ou t^{-1} nulle.

Théorème. — *$\bar{x}$ est toujours un fondamental,* c'est-à-dire pour tout choix de l'itinéraire $\mathfrak{w}$.

La proposition devient évidente moyennant l'établissement de deux lemmes.

Lemme premier. — *Pour $\bar{x}$ et dans une matrice partielle quelconque* L, *la coordonnée z_j, $j > 1$, est toujours zéro.*

En effet, écrivons (51°)

$$z_j^{-1} = \varepsilon_1 \frac{\varphi}{\varphi^{(j-1)}} + \sum \varepsilon''_1 \frac{f}{\varphi^{(j-1)}} + \sum \varepsilon'_1 \frac{F}{\varphi^{(j-1)}} e^{(l'-l)t}.$$

Si $\varphi(t) \equiv 0$, toutes les λ variables z_j de L sont nulles tout le long de $\mathfrak{X}$ et le lemme n'est pas infirmé.

Si $\varphi(t) \not\equiv 0$, le quotient $\varphi : \varphi^{(j-1)}$ a le degré de son numérateur supérieur à celui de son dénominateur. Ce quotient a pour limite ∞ et il en est de même pour z_j^{-1} (53°), puisque les $\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon'_1, \ldots$ sont des constantes numériques arbitraires. Ainsi z_j tend vers zéro. C. Q. F. D.

LEMME SECOND. — *Soient* L *et* L′ *deux composantes quelconques, où, pour* $\overline{x}$, *les deux premières variables* z_1 *et* z'_1 *ne sont pas nulles.* L *et* L′ *appartiennent au même hypersystème* (l) *et ont même catégorie* (50°).

Prenons, en effet, les équations de la courbe $\mathfrak{x}$ (45°)

$$z_1 = \frac{e^{lt}\varphi(t)}{\Phi}, \qquad z'_1 = \frac{e^{l't}\varphi_1(t)}{\Phi}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le quotient

$$z'_1 : z_1 = e^{(l'-l)t}\{K\,t^{q'-q} + \ldots\},$$

où q et q' sont les catégories (50°), doit, pour $t = \infty$, tendre vers une limite bien déterminée, ni nulle ni infinie. Cela exige (52° *in fine*) $l' - l = q' - q = 0$. Alors $l' = l$, les deux matrices appartiennent au même hypersystème; les deux catégories sont égales.

En résumé, pour le point $\overline{x}$, dans tous les hypersystèmes, sauf un, (l) par exemple, toutes les coordonnées sont nulles;

Pour (l) lui-même, ne sont différentes de zéro que tout ou partie des premières coordonnées de chaque matrice.

On reconnaît ainsi que le point $\overline{x}$ est fondamental.

C. Q. F. D.

55° $\overline{x}$ coïncide avec tel ou tel fondamental suivant le choix de l'itinéraire $\mathfrak{w}$.

Supposons que $\overline{x}$ coïncide avec le fondamental ξ_l, fourni par la racine l de l'équation caractéristique. Attribuons à ξ_l, dans la matrice L de (l), le paramètre fondamental $Z \neq 0$. Comme les coordonnées de ξ_l sont connues, par hypothèse, on connaîtra (54°) quelles sont celles des matrices de (l) qui ont même catégorie que L. Cela fera annuler déjà un certain nombre des paramètres c_r (44°) qui figurent dans ces matrices-là.

Soit maintenant dans l'hypersystème (l'), $l' \neq l$, la matrice L′, dont la première variable z'_1 s'exprime, sur $\mathfrak{x}$, par

l'équation

$$\Phi z'_1 = e^{l't} F(t),$$

tandis que

$$\Phi z_1 = \varphi(t) e^{lt}$$

pour la matrice L elle-même. Comme, pour $t = \infty$, z_1 tend vers Z, le quotient $z'_1 : z_1$ doit tendre vers zéro, puisque z'_1 doit s'évanouir à la limite. Donc

$$\lim_{t=\infty} e^{(l'-l)t} \frac{F(t)}{\varphi(t)} = 0.$$

Si $F(t) = Ct^Q + \ldots$, $\varphi(t) = ct^q + \ldots$, Q et q étant les catégories, il faut avoir

$$\lim [C e^{(l'-l)t} t^{Q-q}] = 0,$$

puisque $c \neq 0$ par hypothèse.

Prenons un certain itinéraire $\mathfrak{w}$. Les procédés du 52° donnent toujours la limite de

$$v = e^{(l'-l)t} t^{Q-q}.$$

Si cette limite n'est pas nulle, mais infinie ou indéterminée, il suffira de faire $C = 0$. Cela revient à abaisser convenablement les catégories des composantes L', c'est-à-dire à annuler un certain nombre des paramètres arbitraires dont dépend $\mathfrak{X}$.

56° En résumé, une discussion plus ou moins laborieuse, mais dépourvue de toute difficulté théorique, nous mettra toujours à même, grâce aux procédés du 52°, de considérer comme résolu le problème du 49°.

Les formules du 45° représentent l'*intégrale générale* du système des équations différentielles (X) (42°). Existe-t-il des courbes $\mathfrak{X}$, issues d'un point fondamental, et solutions singulières du système (X)? Cette supposition n'est pas absurde.

Je n'ai pas cherché à élucider la question. Cela m'aurait

entraîné trop en dehors du cadre principal des présentes recherches sur les formes mixtes. Mais le problème est intéressant. Il devra être traité par les méthodes de M. Painlevé (*Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*. Paris, Hermann, 1897).

57° On traitera par une discussion tout à fait analogue à la précédente (48° à 55°) le problème relatif aux rapports mutuels entre les plans fondamentaux et les développables $\mathfrak{V}$.

On remarquera que les courbes $\mathfrak{X}$, d'une part, les développables $\mathfrak{V}$ d'autre part, sont la généralisation de ce que Clebsch a nommé, dans le plan, *courbes de coïncidence principale* T, pour le connexe linéaire $\mathfrak{A}$.

En effet, dans le domaine ternaire $n = 3$, la courbe T a, par définition, pour tangente, la droite u qui, avec le point x, donne l'élément du connexe. Le point dont les coordonnées sont $A_i(x)$ est sur la droite u et il vient l'équation (X) du 42°

$$\frac{dx_i}{ds} = x_i \alpha(s) + \beta(s) A_i(x).$$

Ailleurs (VIII) j'ai étudié les relations, dans le domaine quaternaire $n = 4$, des courbes $\mathfrak{X}$ avec l'*équation de Jacobi dans l'espace*. Il ne serait pas difficile de généraliser ces théories pour n quelconque. Je le ferai peut-être dans un travail ultérieur, plus spécialement consacré au Calcul intégral (équations aux dérivées partielles du premier ordre).

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS.

58° Je me propose d'appliquer les méthodes générales qui ont été exposées dans les trois Chapitres précédents, à l'étude de quelques cas simples, où $n = 3$, 4 ou 5.

Le cas $n = 3$ est celui, bien connu, du connexe linéolinéaire plan de Clebsch. Le cas $n = 4$ a été traité par moi dans le *Mémoire de Bruxelles* [1], mais par des procédés relativement élémentaires et assez laborieux. Les procédés généraux actuels permettront d'abréger et d'alléger la discussion.

59° Prenons le déterminant caractéristique

$$\Delta(r) = |rE - A|$$

décomposé en ses facteurs successifs. On peut toujours (3°) admettre qu'une racine est zéro et qu'une *autre* racine est 1. Alors on écrira

$$(o) \qquad \begin{cases} \Delta(r) = r^{\alpha_0} r^{\alpha_1} \dots r^{\alpha_{k-1}} (r-1)^{\beta_0} (r-1)^{\beta_1} \dots \\ \qquad \alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \dots \geqq \alpha_{k-1}, \qquad \beta_0 \geqq \beta_1 \geqq \dots \end{cases}$$

Lemme. — *Une racine de l'équation caractéristique ne peut fournir plus de $n - 2$ successifs.*

Supposons, en effet, dans la formule (o) ci-dessus

(1) VIII de l'Index Bibliographique.

$k > n-2$. Pour $r=0$, la matrice $r\mathrm{E}-\mathrm{A}$ a ses premiers, seconds, ..., $(k-1)^{\text{ièmes}}$ mineurs tous nuls. La matrice A a le rang $n-k$, c'est-à-dire 1 ou 0. Pour le rang zéro, A disparaît. Pour le rang 1, $a_{ij}=p_i q_j$; alors

$$\mathrm{A}(x, u)=\sum_{ij} a_{ij} u_i x_j=\left(\sum pu\right)\left(\sum qx\right).$$

Le connexe est décomposable. C'est un cas particulier, sans intérêt et que l'on exclura.

Dans ce qui suit, $k=n-2$ désignera le nombre *maximum* de successifs que peut fournir une racine de l'équation caractéristique.

60° Je désignerai par

$$\xi_i^{(l)} \qquad \text{ou} \qquad \eta_i^{(l)}$$

les coordonnées du point fondamental ξ_l ou du plan fondamental η_l, fourni par la racine l.

61° Je nommerai X_i et U_i les points et plans tels que

$$x_i \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad u_i \neq 0,$$

les autres coordonnées étant nulles. La condition (1°) $x_0=1$ ou $u_0=1$ donne

$$x_i=\frac{1}{e_i}, \qquad u_i=\frac{1}{g_i}.$$

X_i et U_i sont le *sommet* et la *face* opposés du *n-èdre de référence* ($n=3$, triangle de référence; $n=4$, tétraèdre de référence; ...).

61° *bis* Pour $n=3$ ou 4, je considérerai successivement :

L'énumération des types;
Les points fondamentaux;
Les courbes $\mathfrak{C}$ (Chapitre II) de degré $\mathrm{K}-1$;
Les courbes $\mathfrak{X}$ (Chapitre III).

Le lecteur verra facilement, par dualité, ce qu'il en est des

plans fondamentaux, des développables $\mathfrak{v}$ (Chapitre III), des développables analogues aux courbes $\mathfrak{C}$.

Enfin $k = n - 2$ aura la signification indiquée au 59°, *in fine*.

$$n = 3, \qquad k = 1.$$

62° Il y a trois racines dont chacune ne fournit qu'un seul successif.

Énumération des types.

On voit qu'il y a seulement trois types :

I.	$\Delta = r(r-1)(r-a)$	3 racines distinctes,
II.	$= r^2(r-1)$	2 » »
III.	$= r^3$	1 racine triple.

Type.	A.		A(x, u).
I.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	$a \neq 1$ ou 0	$u_2 x_2 + a u_3 x_3$
II.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		$u_1 x_2 + u_3 x_3$
III.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		$u_1 x_2 + u_2 x_3$

Points fondamentaux.

63° Pour le type I,

$$\xi^{(0)} = X_1, \qquad \xi^{(1)} = X_2, \qquad \xi^{(a)} = X_3.$$

Pour le type II,

$$\xi^{(0)} = X_1,$$

car x_1 est la première variable de l'hypersystème (0).

$$\xi^{(1)} = X_3.$$

Pour le type III,

$$\xi^{(0)} = X_1.$$

Courbes $\mathfrak{C}$.

64° Le type I n'en comporte pas, ni la racine simple du type II.

La racine double nulle du type II donne la droite U_3

$$x_1 = Z, \qquad x_2 = Zt, \qquad x_3 = 0,$$

où Z est le paramètre fondamental. Il y a donc deux fondamentaux confondus en X sur la droite U_3.

La racine triple nulle du type III donne la conique $\mathfrak{C}$

$$x_1 = Z, \qquad x_2 = tZ, \qquad x_3 = t^2 Z, \qquad x_2^2 - x_1 x_3 = 0.$$

Il y a trois fondamentaux confondus en X_1 sur cette conique.

Courbes $\mathfrak{X}$.

65°.

Type.

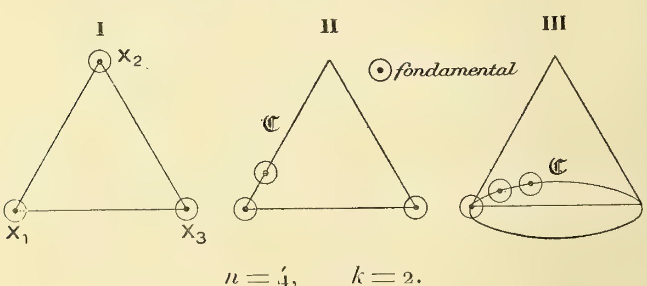
I. $\Phi x_1 = c_{01}$, $\Phi x_2 = c_{02} e^t$, $\Phi x_3 = c_{03} e^{at}$;

II. $\Phi x_1 = c_{01} + c_{11} t$; $\Phi x_2 = c_{11}$, $\Phi x_3 = e^t c_{03}$;

III. $$\begin{cases} \Phi x_1 = c_0 + c_1 t + c_2 \dfrac{t^2}{2!}, \quad \Phi x_2 = c_1 + c_2 t, \quad \Phi x_3 = c_2; \\ x_2^2 - 2 x_1 x_3 + 2 x_3^2 \left(\dfrac{c_0}{c_2} - \dfrac{1}{2} \dfrac{c_1^2}{c_2^2} \right) = 0; \end{cases}$$

coniques tangentes en X_1 à la conique $\mathfrak{C}$ du même type, et surosculatrices en X_1 à la conique fixe $x_2^2 - 2x_1 x_3 = 0$.

Fig. 2.



$$n = 4, \qquad k = 2.$$

66° Chaque racine distincte fournit un ou deux successifs.

Type.	$\Delta(r) = \vert rE - A \vert$.	Racines de l'équation caractéristique.
I.	$r(r-1)(r-a)(r-b)$	quatre racines distinctes, 0, 1, a, b.
II.	$r^2(r-1)(r-a)$	trois racines distinctes; racine double nulle; unité et a, racines simples.
III	$r.r(r-1)(r-a)$	
IV.	$r^2(r-1)^2$	deux racines distinctes, dont chacune double.
V.	$r.r(r-1)^2$	
VI.	$r.r(r-1)(r-1)$	
VII.	$r^3(r-1)$	deux racines distinctes; racine triple nulle; une racine simple.
VIII.	$r^2.r(r-1)$	
IX.	r^4	une racine quadruple nulle.
X.	$r^3 r$	
XI.	$r^2.r^2$.	

Voici maintenant la correspondance entre les numéros des types, soit (nouveaux) dans le présent travail, soit (anciens) dans mon *Mémoire de Bruxelles* (seconde Partie, Chapitres II et III).

Types	
nouveau.	ancien.
I	I
II	II
III	VI
IV	III
V	VII
VI	VIII
VII	IV
VIII	IX
IX	V
X	Oublié
XI	X

Énumération des types.

67°.

Type.	A.	A(x, u).
I.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$	quatre hypersystèmes $u_2 x_2 + a u_3 x_3 + b x_4 u_4$; $a \neq b$.

Type.	A.	A(x, u).
II.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	trois hypersystèmes; (0), avec matrice binaire $u_1 x_2 + u_3 x_3 + a u_4 x_4$.
III.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	trois hypersystèmes; (0), avec deux matrices d'ordre *un* $u_3 x_3 + a u_4 x_4$.
IV.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	deux hypersystèmes, chacun avec matrice binaire $u_1 x_2 + u_3 x_3 + u_3 x_4 + u_4 x_4$.
V.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	deux hypersystèmes; (0), avec deux matrices; (1), avec matrice binaire $u_3 x_3 + u_3 x_4 + u_4 u_4$.
VI.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	les deux hypersystèmes ont chacun deux matrices $u_3 x_3 + u_4 x_4$.
VII.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	deux hypersystèmes; (0), avec matrice ternaire $u_1 x_2 + u_2 x_3 + u_4 x_4$.
VIII.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	deux hypersystèmes; (0), avec deux matrices, dont une binaire $u_1 x_2 + u_4 x_4$.
IX.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	hypersystème (0), contenant une matrice partielle quaternaire $u_1 x_2 + u_2 x_3 + u_3 x_4$.
X.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	hypersystème (0), contenant une matrice partielle ternaire et une matrice d'ordre *un* $u_1 x_2 + u_2 x_3$.

TYPE.	A.	A(x, u).
XI.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	hypersystème (o), avec deux matrices binaires $u_1 x_2 + u_3 x_4$.

Points fondamentaux.

68°.

TYPE I.

Il y a quatre fondamentaux, sommets du tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$:

$$\xi^{(0)} = X_1, \qquad \xi^{(1)} = X_2, \qquad \xi^{(a)} = X_3, \qquad \xi^{(b)} = X_4.$$

TYPE II.

Trois fondamentaux aux sommets de $\mathfrak{T}$:

$$\xi^{(0)} = X_1, \qquad \xi^{(1)} = X_3, \qquad \xi^{(b)} = X_4.$$

TYPE III.

$$\xi^{(1)} = X_3, \qquad \xi^{(a)} = X_4.$$

La racine zéro fournit comme fondamentaux les ∞ points de la droite $x_3 = x_4 = 0$.

TYPE IV.

$$\xi^{(0)} = X_1, \qquad \xi^{(1)} = X_3.$$

TYPE V.

$$\xi^{(1)} = X_3.$$

La racine zéro donne comme fondamentaux tous les ∞ points de la droite $x_3 = x_4 = 0$.

TYPE VI.

La racine zéro donne les ∞ points de la droite $x_3 = x_4 = 0$; la racine 1 donne les ∞ points de la droite $x_1 = x_2 = 0$.

Type VII.

$$\xi^{(0)} = X_1, \qquad \xi^{(1)} = X_4.$$

Type VIII.

$\xi^{(1)} = X_4$. La racine zéro fournit les ∞ points de la droite $x_2 = x_4 = 0$.

Type IX.

$\xi^{(0)} = X_1$.

Type X.

Sont fondamentaux les ∞ points de la droite $x_2 = x_3 = 0$.

Type XI.

Sont fondamentaux les ∞ points de la droite $x_2 = x_4 = 0$.

Courbes $\mathfrak{C}$.

69° Ne donnent de courbes $\mathfrak{C}$ que les successifs de Δ qui ont un exposant supérieur à l'unité. Voici ce que l'on trouve :

Type II (*racine double zéro*).

$\mathfrak{C}$ est la droite $x_3 = x_4 = 0$. Il y a sur cette droite deux fondamentaux confondus en X_1.

Type IV (*racines doubles* 0 *et* 1).

Deux fondamentaux confondus en X_1 sur la droite $\mathfrak{C}$, $x_3 = x_4 = 0$. Deux fondamentaux confondus en X_3 sur la droite $x_1 = x_2 = 0$.

Type V (*racine double* 1).

Deux fondamentaux confondus en X_3 sur la droite $x_1 = x_2 = 0$.

Type VII (*racine triple zéro*).

Il y a trois fondamentaux confondus en X_1 sur la conique $\mathfrak{C}$

$$x_4 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = t^2,$$

c'est-à-dire

$$0 = x_4 = x_2^2 - x_1 x_3.$$

TYPE VIII (*racine double zéro*).

Deux fondamentaux confondus en X_1 sur la droite $x_3 = x_4 = 0$.

TYPE IX (*racine quadruple zéro*).

Quatre fondamentaux confondus en X_1 sur la cubique gauche $\mathfrak{C}$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = t^2, \qquad x_4 = t^3.$$

TYPE X (*racine triple nulle*).

Trois fondamentaux confondus en X_1 sur la conique $\mathfrak{C}$

$$x_4 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = t^2$$

ou

$$0 = x_4 = x_2^2 - x_1 x_3.$$

TYPE XI (*deux racines doubles nulles*).

Deux fondamentaux confondus en X_1 sur la droite $\mathfrak{C}$ $x_3 = x_4 = 0$. Deux fondamentaux confondus en X_3 sur la droite $\mathfrak{C}$ $x_1 = x_2 = 0$.

La conique $\mathfrak{C}$ du type VII est tracée dans le plan U_4. Elle a la forme schématique ci-dessous :

Fig. 3.

La cubique gauche $\mathfrak{C}$ du type IX est tangente en X_1 à la droite X_1X_2; le plan osculateur en X_1 est U_4.

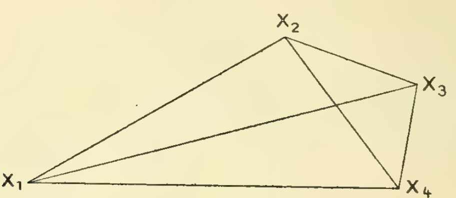
70° Je représenterai ces diverses dispositions de points fondamentaux par des figures schématiques où

⊙ sera un point fondamental,

= sera une droite de points fondamentaux.

Le tétraèdre $\mathfrak{T}$ de référence sera uniformément indiqué comme ceci :

Fig. 4.



⊙ point fondamental;

═ droite dont tous les points sont fondamentaux.

Fig. 5.

I II III IV V VI VII VIII IX X XI

Courbes $\mathfrak{X}$.

71° Voici maintenant les formules qui donnent les courbes $\mathfrak{X}$ dans les onze cas.

Type	$\Phi x_1 =$	$\Phi x_2 =$	$\Phi x_3 =$	$\Phi x_4 =$	Paramètres arbitraires.
I.	α_0	$\beta_0 e^t$	$\gamma_0 e^{at}$	$\delta_0 e^{bt}$	$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$
II.	$c_0 + c_1 t$	c_1	$\gamma_0 e^t$	$\delta_0 e^{at}$	$c_0, c_1, \gamma_0, \delta_0$
III.	α_0	β_0	$\gamma_0 e^t$	$\delta_0 e^{at}$	$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$
IV.	$c_0 + c_1 t$	c_1	$e^t(d_0 + d_1 t)$	$e^t d_1$	c_0, c_1, d_0, d_1
V.	α_0	β_0	$e^t(c_0 + c_1 t)$	$e^t c_1$	$\alpha_0, \beta_0, c_0, c_1$
VI.	α_0	β_0	$\gamma_0 e^t$	$\delta_0 e^t$	$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$
VII.	$c_0 + c_1 t + \frac{1}{2!} c_2 t^2$	$c_1 + c_2 t$	c_2	$\alpha_0 e^t$	c_0, c_1, c_2, α_0
VIII.	$c_0 + c_1 t$	c_1	d_0	$\alpha_0 e^t$	c_0, c_1, d_0, α_0
IX.	$c_0 + c_1 t + \frac{1}{2!} c_2 t^2 + \frac{1}{3!} c_3 t^3$	$c_1 + c_2 t + \frac{1}{2!} c_3 t^2$	$c_2 + c_3 t$	c_3	c_0, c_1, c_2, c_3
X.	$c_0 + c_1 t + \frac{1}{2!} c_2 t^2$	$c_1 + c_2 t$	c_2	α_0	c_0, c_1, c_2, α_0
XI.	$c_0 + c_1 t$	c_1	$d_0 + d_1 t$	d_1	c_0, c_1, d_0, d_1

Pour les trois derniers types, les courbes $\mathfrak{X}$ sont algébriques et même unicursales. $\mathfrak{X}$ est une

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{cubique gauche} & \text{pour} & \text{le type} & \text{IX} \\ \text{conique} & \text{»} & \text{»} & \text{X} \\ \text{droite} & \text{»} & \text{»} & \text{XI} \end{array}\right\}.$$

On construira toutes ces courbes sans difficulté.

$$n = 5, \qquad k = 3.$$

72° Je me bornerai à donner l'énumération des 24 types. La construction effective des matrices, fondamentaux, courbes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{X}$, ... est fort longue, sans présenter désormais aucune difficulté théorique.

Chaque racine distincte de l'équation caractéristique donne jusqu'à trois successifs. Voici toutes les expressions possibles pour $\Delta(r) = |rE - A|$.

Cinq racines distinctes

I. $$r(r-1)(r-a)(r-b)(r-c).$$

Quatre racines distinctes dont une double

II. $$r^2(r-1)(r-a)(r-b),$$

III. $$r.r(r-1)(r-a)(r-b).$$

Trois racines distinctes dont deux doubles

IV. $$r^2(r-1)^2(r-a),$$

V. $$r.r(r-1)^2(r-a),$$

VI. $$r.r.(r-1).(r-1)\ (r-a).$$

Trois racines distinctes dont une triple

VII. $$r^3(r-1)(r-a),$$

VIII. $$r^2r(r-1)(r-a),$$

IX. $$r.r.r(r-1)(r-a).$$

Deux racines distinctes : une quadruple et une simple

X. $$r^4(r-1),$$

XI. $$r^3.r(r-1),$$

XII. $$r^2.r^2(r-1),$$

XIII. $$r^2.r.r(r-1).$$

Deux racines distinctes : une triple et une double

XIV. $r^3(r-1)^2$,

XV. $r^2, r(r-1)^2$,

XVI. $r.r.r(r-1)^2$,

XVII. $r^3(r-1)(r-1)$,

XVIII. $r^2 r(r-1)(r-1)$,

XIX. $r.r.r(r-1)(r-1)$.

Racine quintuple : un ou deux successifs

XX. r^5,

XXI. $r^4 r$,

XXII. $r^3 r^2$.

Racine quintuple : trois successifs

XXIII. $r^3 r r$,

XXIV. $r^2 r^2 r$.

On trouve ainsi les vingt-quatre types annoncés.

73° En comparant la discussion du présent Chapitre avec celle qui remplit les trois premiers Chapitres de la seconde Partie de mon *Mémoire de Bruxelles*, on voit quelle simplification introduisent dans la matière les *successifs* (*Elementartheiler* de Weierstrass), c'est-à-dire les *invariants projectifs* d'un *faisceau linéaire*

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$$

de matrices n-aires.

Aucun géomètre, jusqu'à présent, à ma connaissance du moins, n'a construit les invariants projectifs du système linéaire de ∞^{m-1} matrices n-aires

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_m A_m.$$

Pour ce motif, il semble prématuré d'aborder la construc-

tion d'un système de *plusieurs* connexes linéaires, dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

On n'aurait à sa disposition que les procédés qui figurent dans la seconde Partie de mon *Mémoire de Bruxelles*, aux Chapitres V à IX. Ces procédés, encore maniables sur le terrain quaternaire $n = 4$, deviendraient trop laborieux pour $n > 4$.

Dans cette première Partie, j'ai désigné le nombre des dimensions de l'espace par $n - 1$ et non $N - 1$. Je reprends dorénavant la notation N, car la lettre n a, dans la théorie des substitutions crémoniennes, une autre signification consacrée.

DEUXIÈME PARTIE.

ALGÈBRE DES FORMES MIXTES.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

1° Rappelons d'abord les principes fondamentaux de l'Arithmétique et de l'Algèbre.

On suivra le mode d'exposition et la terminologie de M. König (IV).

Soit $\mathfrak{G}$ un système comprenant des grandeurs ou *termes*

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots; \qquad \beta, \quad \beta_1, \quad \ldots; \qquad \ldots$$

en nombre fini ou infini. $\mathfrak{G}$ sera un *domaine* (Bereich).

2° Soient α_1 et α_2 deux termes pris à volonté dans le domaine.

L'*Addition* est une opération *univoque* qui fait correspondre à α_1 et α_2 un troisième terme α_3, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$.

Comme nature intime, l'Addition pourra ne ressembler guère à l'addition ordinaire; mais *elle suivra les mêmes lois,* c'est-à-dire elle sera :

$$\text{commutative :} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1;$$

$$\text{associative :} \quad (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3);$$

elle admettra une opération inverse, la *Soustraction* univoque et toujours possible. Enfin l'Addition admettra un *module* (o, ou zéro) tel que $\alpha_1 + 0 = \alpha_1$.

3° De même la *Multiplication* sera une opération *univoque* qui fait correspondre à α_1 et α_2 un troisième terme α_3, $\alpha_3 = \alpha_1\alpha_2$.

Comme nature intime, la Multiplication pourra ne pas beaucoup ressembler à la multiplication ordinaire; mais elle *suivra les mêmes lois*, c'est-à-dire elle sera

commutative : $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$;
associative : $(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$;
distributive : $(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$.

La Multiplication admettra un *module* (1, ou unité absolue), tel que $1\alpha_1 = \alpha_1$.

4° Par hypothèse, le domaine $\mathfrak{O}$ admettra une Addition et une Multiplication. De plus, la suite

$$1, \quad 1+1, \quad 1+1+1, \quad \ldots$$

ne contient pas le zéro. Enfin l'équation $\alpha\xi = \beta$ pourra, pour un choix approprié de termes α et β dans $\mathfrak{O}$, *ne pas admettre* une solution ξ dans le domaine.

$\mathfrak{O}$ sera alors un *domaine holoïde*. König emploie pour le désigner des crochets $[\mathfrak{O}]$.

5° Associons deux à deux les termes de $[\mathfrak{O}]$, de façon à construire le symbole *fraction*

$$\frac{\beta}{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0).$$

La Multiplication et l'Addition des fractions se définissent par les formules

$$\frac{\beta}{\alpha}\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}, \qquad \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\alpha\beta' + \beta\alpha'}{\alpha\alpha'}.$$

Les fractions $\frac{\beta}{\alpha}$ sont les termes d'un domaine *orthoïde* $(\mathfrak{O})$, que König désigne par les parenthèses et qui comprend le domaine holoïde $[\mathfrak{O}]$.

6° Dans $[\mathfrak{O}]$, le terme α *divise* le terme γ, s'il existe un terme β tel que $\gamma = \alpha\beta$. Tout diviseur de l'unité absolue (3°) sera *une unité*. Sera *irréductible* toute quantité divisible seulement par elle-même ou par les unités.

Un terme de $[\mathfrak{O}]$ est *premier* si, divisant un produit $\alpha\beta$, il divise forcément un au moins des facteurs α et β.

Tout facteur premier est irréductible, *mais la réciproque n'est vraie qu'exceptionnellement*, c'est-à-dire pour les seuls domaines *complets*, dont il va être question.

7° Soient α et β deux termes quelconques de $[\mathfrak{O}]$ et δ un troisième terme qui, *s'il existe*, possède les propriétés suivantes :

I. δ divise α et β;

II. Tout diviseur commun à α et β divise aussi δ.

δ se nommera le p. g. c. d. (plus grand commun diviseur) de α et β.

$[\mathfrak{O}]$ sera un domaine *complet* (*vollständig*) si deux termes *quelconques* du domaine ont toujours un p. g. c. d.

Si $[\mathfrak{O}]$ est complet, tout facteur irréductible est aussi un facteur premier.

8° Sont complets, par exemple, le domaine des nombres entiers naturels, le domaine des polynomes à un nombre quelconque de variables *indépendantes*, ...

Sont au contraire incomplets, par exemple :

Le domaine des nombres $\alpha + j\beta$, où α et β sont des entiers ordinaires, tandis que $j^2 + 5 = 0$; le domaine des polynomes à plusieurs variables, lorsque ces variables, au lieu d'être indépendantes, sont liées par des relations algébriques, ...

Pour toutes explications et démonstrations, nous renverrons au Livre de König, notamment au Chapitre I.

9° Les théories et raisonnements habituels de l'Arithmétique et de l'Algèbre ne sont applicables qu'aux domaines complets. L'Algèbre des domaines incomplets, beaucoup plus compliquée, exige des notions nouvelles, quantités *idéales*, etc. (König, page 477).

Quand on a affaire à un certain domaine, la question capitale est de savoir si ce domaine est complet, et aussi de savoir si ce domaine est *bien défini* (*wohldefiniert*), c'est-à-dire si la construction du p. g. c. d. peut se faire par un nombre fini d'opérations d'une nature déterminée.

Le problème principal du présent travail sera précisément de reconnaître si un certain domaine holoïde est complet et bien défini.

Introduisons maintenant le premier des domaines que nous aurons à étudier.

10° Prenons deux systèmes de variables

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_j, & j=1,2,\ldots, & \mathrm{N} \\ u_i, & i=1,2,\ldots, & \mathrm{N}' \end{array} \right\};$$

soit

$$\mathrm{F}\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix}$$

un polynome homogène et de degré m par rapport aux x_j, homogène et de degré m' par rapport aux u_i. J'écrirai

$$\mathrm{F}\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \\ \mathrm{N} & \mathrm{N}' \end{pmatrix},$$

et je dirai que F est une *forme* ayant pour *ordre* m et pour *classe* m'. m et m' seront aussi les deux *dimensions* de la forme. Quand aucune ambiguïté n'est à craindre, on peut écrire plus simplement

$$\mathrm{F}\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix}$$

ou même

$$\mathrm{F}(m, m').$$

m et m' seront des entiers non négatifs.

11° Nommons $E(N, N')$ le domaine des formes F.

L'Addition (2°) sera l'addition ordinaire, mais s'opérant exclusivement entre formes de même ordre et de même classe, de façon que la somme soit encore une forme de l'ordre et de la classe donnés, suivant la formule

$$F'(m, m') + F''(m, m') = F(m, m').$$

La Multiplication (3°) sera la multiplication ordinaire

$$F'(m, m')\,F''(n, n') = F(m+n, m'+n').$$

Les formes d'ordre nul et de classe nulle sont des constantes C. Si $C = 0$, on a le zéro, module de l'Addition (2°). Si $C = 1$, on a l'unité absolue, module de la Multiplication (3°).

Les coefficients des formes F sont des nombres, complexes ou réels, ordinaires quelconques.

12° Le domaine $E(N, N')$ est-il holoïde au sens du 4°?

Oui, car l'équation à inconnue ξ, par exemple,

$$x_1 \xi = x_2^2,$$

n'est satisfaite par aucune forme d'ordre *un* et de classe *zéro*.

Le domaine est-il complet? On peut construire le p. g. c. d. D de deux formes F et G considérées comme polynomes aux $N + N'$ variables indépendantes x et u. Seulement, il reste à prouver que D est lui-même une forme.

Quoique la propriété soit presque évidente, voici une démonstration.

13° Il suffira de montrer que le domaine $E(N, N')$, ou simplement E, est complet dès qu'est complet le domaine E_1 obtenu en se restreignant, dans E, aux formes où ne figure plus une des variables indépendantes, x_1 par exemple. En effet, procédant ainsi de proche en proche, on arriverait aux domaines $E(1, 0)$ ou $E(0, 1)$, c'est-à-dire aux formes x_1^m ou $u_1^{m'}$, à une seule variable. Ces derniers domaines sont évidemment complets.

14° Soient donc deux formes de $E(N_0, N'_0)$, ou E, à N_0 variables x et N'_0 variables u, savoir :

$$F\begin{pmatrix} M & M' \\ x; & u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G\begin{pmatrix} N & N' \\ x; & u \end{pmatrix},$$

que l'on écrira (König, p. 71)

$$(o) \quad \begin{cases} F = A_0 x^m + \ldots + A_i x^{m-i} + \ldots + A_m, \\ G = B_0 x^n + \ldots + B_j x^{n-j} + \ldots + B_n, \\ \text{où} \\ \qquad m \leqq M, \qquad n \leqq N, \qquad n \leqq m, \\ \qquad\qquad x = x_1. \end{cases}$$

A_i et B_j sont des formes du domaine E_1 (13°). Pour mettre en évidence l'ordre et la classe de A_i et de B_j, on écrira

$$A_i = \begin{Bmatrix} M - m + i \\ M' \end{Bmatrix}, \qquad B_j = \begin{Bmatrix} N - n + j \\ N' \end{Bmatrix}$$

pour exprimer que A_i a $M - m + i$ pour ordre et M' pour classe, etc.

On peut admettre que chacune des formes F et G, polynomes en x, est primitive, c'est-à-dire que le p. g. c. d. des coefficients A ou B, termes du domaine E_1, est une simple constante (forme d'ordre et de classe *zéro*). En effet, si l'on avait

$$F = \mathfrak{A} F', \qquad G = \mathfrak{B} G',$$

où F' et G' seraient des polynomes primitifs en x (tandis que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ seraient des termes du domaine E_1), alors, pour avoir le p. g. c. d. de F et G, il suffirait (König, p. 90) de multiplier le p. g. c. d. de F' et G' par le p. g. c. d. de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. Or le domaine E_1 est complet par hypothèse et ce dernier p. g. c. d. existe toujours.

On ne restreindra donc pas la généralité en faisant F et G primitives.

15° Conservons toutes les notations du 14°. Essayons de

diviser F par G en les considérant toutes deux comme polynomes en x. On aura (König, p. 71) l'identité

$$B_0^{m-n+1} F = GQ + R, \tag{1}$$

où Q est un polynome en x de degré $m-n$, tandis que R est un polynome en x de degré $n-1$ au plus.

On écrira donc

$$Q = \sum_r Q_r x^{m-n-r} \quad \{r = 0, 1, \ldots, m-n\} \tag{2}$$

avec (König, *loc. cit.*)

$$Q_0 \neq 0$$

et

$$B_0^{m-n+1} A_r = \sum_{r'=0}^{r'=r} Q_{r'} B_{r-r'} = B_r Q_0 + B_{r-1} Q_1 + \ldots + B_0 Q_r. \tag{3}$$

Lemme. — *Si, pour $r' < r$, on a les conditions suivantes : 1° $Q_{r'}$ est un terme de E_1 ; 2° on a*

$$Q_{r'} = \left\{ \begin{matrix} (m-n)(N-n) + M - m + r' \\ (m-n)N' + M' \end{matrix} \right\}, \tag{4}$$

alors ces conditions seront satisfaites aussi pour Q_r.

En effet, comme (14°)

$$B_{r-r'} = \left\{ \begin{matrix} N - n + r - r' \\ N' \end{matrix} \right\},$$

il vient

$$Q_{r'} B_{r-r'} = \left\{ \begin{matrix} N - n + r - r' + (m-n)(N-n) + M - m + r' \\ N' + (m-n)N' + M' \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (m-n+1)(N-n) + M - m + r \\ (m-n+1)N' + M' \end{matrix} \right\}.$$

Mais on a (14°)

$$B_0 = \left\{ \begin{matrix} N - n \\ N' \end{matrix} \right\}, \qquad A_r = \left\{ \begin{matrix} M - n + r \\ M' \end{matrix} \right\}.$$

Par conséquent les formes $B_0^{m-n+1} A_r$ et $Q_{r'} B_{r-r'}$ ont même ordre et même classe. Cet ordre et cette classe sont indépendants de r'. Donc, en vertu de l'égalité (3), Q_r est un terme de E_1. De l'égalité (3) on déduit immédiatement l'ordre et la classe de Q_r qui satisfont à la relation (4).

Les conditions du lemme sont satisfaites pour Q_0, car l'on a, d'après (3), $Q_0 = A_0 B_0^{m-n}$ et

$$Q_0 = \left\{ \begin{matrix} (m-n)(N-n) + M - m \\ (m-n)N' + M' \end{matrix} \right\}.$$

C'est précisément la formule (4), où l'on a fait $r' = 0$.

Bref, pour toute valeur de r, $\{r = 0, 1, \ldots, m-n\}$:

1° Q_r est un terme de E_1; 2° il vient

$$(5) \qquad Q_r = \left\{ \begin{matrix} (m-n)(N-n) + M - m + r \\ (m-n)N' + M' \end{matrix} \right\},$$

C. Q. F. D.

Alors

$$Q_r x^{m-n-r} = \left\{ \begin{matrix} (m-n)(N-n) + M - n \\ (m-n)N' + M' \end{matrix} \right\}.$$

L'expression $Q = \sum_r Q_r x^{m-n-r}$ est un terme de E et il vient successivement

$$Q = \left\{ \begin{matrix} (m-n)(N-n) + M - n \\ (m-n)N' + M' \end{matrix} \right\},$$

puis, comme $G = \left\{ \begin{matrix} N \\ N' \end{matrix} \right\}$,

$$GQ = \left\{ \begin{matrix} (m-n)(N-n) + M - n + N \\ (m-n)N' + M' + N' \end{matrix} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{matrix} (m-n+1)(N-n) + M \\ (m-n+1)N' + M' \end{matrix} \right\}.$$

Or

$$B_0^{m-n+1} F = \left\{ \begin{matrix} (m-n+1)(N-n) + M \\ (m-n+1)N' + M' \end{matrix} \right\}.$$

Les deux expressions GQ et $B_0^{m-n+1}F$ sont deux termes de E, avec même ordre et même classe. Il en est, en vertu de (1), de même pour R.

16° La présente analyse se résume en l'énoncé suivant :

Théorème. — *Soient* F *et* G *deux formes qui sont des termes du domaine* E. *Considérons* F *et* G *comme des polynomes en x et supposons le degré m de* F *en x supérieur ou égal au degré n de* G *en x. Divisons* F *par* G; *le reste de la division est encore un terme de* E.

17° F et G envisagés comme polynomes à N + N′ variables indépendantes x et u admettent (12°) un p. g. c. d. D. Je vais montrer que D est aussi un terme du domaine E.

Pour chercher D, on opère par l'algorithme d'Euclide (König, p. 89). On divise F par G et l'on a un reste R, *terme de* E. On divise ensuite G par R et l'on a un reste R_1 et ainsi de suite, toujours traitant F, G, R, R_1, R_2, ... comme des polynomes en x. Les restes successifs sont des termes de E. Le p. g. c. d. D cherché est un de ces restes et D est un terme de E.

En résumé, *le domaine* E *du* 11° *est un domaine complet.*

Pour être tout à fait exact, je dois ajouter que D est un des restes successifs, après que ce reste a été rendu primitif par le départ d'un facteur, terme du domaine E_1 (König, p. 90); mais cette observation ne change rien au résultat.

18° La discussion qui précède donne la façon de calculer le p. g. c. d. D de deux formes F et G, termes du domaine E. Ce dernier domaine est donc *bien défini* au sens du 9°.

CHAPITRE II.

DOMAINE HOLOÏDE Ω DES FORMES MIXTES.

19° Dans un espace à $N-1$ dimensions, prenons les N variables :

$x_1, x_2, \ldots, x_N,$	$u_1, u_2, \ldots, u_N,$
coordonnées homogènes d'un point x,	coordonnées homogènes d'un plan u.

Le point x et le plan u seront supposés en situation réunie (plan passant par le point) et

$$\omega = \sum ux = 0;$$

x et u définiront un *élément* (x, u) de l'espace.

20° On nommera *forme mixte* une forme bi-N-aire (bibinaire, pour $N=2$; biternaire, pour $N=3$; biquaternaire, pour $N=4$; ...), homogène et de degré m par rapport aux x, homogène et de degré m' par rapport aux u, *où les x et les u sont les coordonnées d'un élément,* c'est-à-dire *sont liées par la relation* $\omega = 0$. On désignera une forme mixte par

$$F\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix}$$

où m est l'*ordre* et m' la *classe*. Seulement les formes mixtes auront une différence importante d'avec les formes F d'un do-

maine $E(N, N)$ considéré au Chapitre précédent. Les $2N$ variables ne sont plus indépendantes, mais liées par la relation $\omega = 0$.

Ainsi *toute forme mixte* (et aussi *le quotient de deux formes mixtes*) sera une *fonction de l'élément géométrique* (x, u).

21° Donnons-nous arbitrairement :

Les N variables u;

Les $N - 1$ variables $x_2, x_3, \ldots$;

L'élément (x, u) est défini sans ambiguïté, tandis que la variable x_1 se déduit de $\omega = 0$ par la formule

$$x_1 = -\frac{u_2 x_2 + \ldots}{u_1} = \frac{\zeta}{u_1}.$$

Ainsi, en faisant parcourir à l'élément (x, u) tout l'espace, on a le droit de considérer comme indépendantes les $2N - 1$ variables : $x_2, x_3, \ldots; u_1, u_2, \ldots$.

Cette remarque si simple est très importante pour la suite.

Nommons $F^{(1)}$ toute forme mixte où la variable x_1 ne figure pas. En vertu de ce qui vient d'être dit, les $F^{(1)}$ constituent un *domaine complet* $E(N - 1, N)$ considéré au Chap. I.

De là une proposition évidente :

Lemme. — *Toute forme* $F^{(1)}$, *nulle pour un élément arbitraire de l'espace, est identiquement nulle*, c'est-à-dire *a tous ses coefficients nuls.*

22° Théorème. — *Si une forme mixte* $F\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix}$ *est nulle pour un élément arbitraire de l'espace,* F *est divisible par* ω.

Considérons F comme un polynome en x_1 et $\omega = u_1 x_1 - \zeta$, $\zeta = -(u_2 x_2 + \ldots)$, comme un binome en x_1. Divisons F par ω et soit $R^{(1)}$ le reste de la division, où x_1 ne figure plus. $R^{(1)}$ est d'ailleurs homogène en $u_1, u_2, \ldots$ et en $x_2, x_3, \ldots$ en vertu du théorème du 16°.

On a donc l'identité

$$u_1^m F = \omega \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x; & u \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} m-1 & m+m'-1 \\ x; & u \end{pmatrix} + R^{(1)} \begin{pmatrix} m & m+m' \\ x; & u \end{pmatrix}.$$

Mais, par hypothèse et pour un élément arbitraire de l'espace, $F = 0$ et $\omega = 0$. Alors $R^{(1)} = 0$. Par suite (lemme du 21°) $R^{(1)}$ est identiquement nul et il reste l'identité

$$u_1^m F = \omega Q;$$

u_1^m, ne divisant pas ω, divise $Q = u_1^m P$ et il reste

$$F \begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x; & u \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} m-1 & m'-1 \\ x; & u \end{pmatrix}.$$

C. Q. F. D.

Il va sans dire que, dans le présent théorème, la divisibilité du *polynome* F par le *polynome* ω est entendue *au sens ordinaire* du mot.

23° Pour exprimer que la forme mixte F est divisible par ω, on dira que F est congrue à zéro, suivant le module ω. On écrira $F \equiv 0 \pmod{\omega}$.

Si deux formes mixtes A et B de même ordre et de même classe sont égales pour tout élément arbitraire de l'espace, je dirai qu'elles sont *équivalentes*, ou bien *indistinctes à l'équivalence près*.

La condition nécessaire et suffisante d'équivalence est évidemment

$$B - A \equiv 0 \pmod{\omega}, \qquad \text{ou} \qquad B \equiv A \pmod{\omega},$$

ou

$$B = A + \omega P,$$

P étant encore une forme mixte.

24° Un *connexe* sera le lieu géométrique des éléments, dont les coordonnées annulent une forme mixte.

Par conséquent, *l'algèbre des connexes* (*ou des formes mixtes*) *est l'algèbre des congruences suivant le module* ω.

Dans l'algèbre des connexes, toutes les formules et toutes les propriétés doivent être *permanentes*, c'est-à-dire subsister quand on remplace toute forme mixte par l'une quelconque de ses équivalentes (23°).

Sont bien entendu applicables aux congruences suivant le module ω les théories générales données par M. König sur les congruences (Chap. I, § 10; Chap. VII, VIII et IX).

Comme le module des congruences sera toujours ω, j'écrirai souvent : $B \equiv A$, au lieu de : $B \equiv A \pmod{\omega}$.

25° Je nommerai Ω le domaine des formes mixtes. L'Addition (2°) et la Multiplication (3°) seront *à l'équivalence près* (23°) l'addition et la multiplication ordinaires du 11°.

Le zéro, module de l'Addition, sera toute forme mixte multiple de ω (22°). Cherchons quel est le module de la Multiplication. Soient $K\begin{pmatrix} \sigma & \sigma' \\ x; & u \end{pmatrix}$ ce module et $A\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ x; & u \end{pmatrix}$ une forme mixte quelconque. On doit avoir

$$KA \equiv A,$$

$$\alpha + \sigma = \alpha, \qquad \alpha' + \sigma' = \alpha', \qquad \text{d'où} \qquad \sigma = \sigma' = 0.$$

K est une constante. Nous verrons un peu plus bas (26°) que $K = 1$. Donc la suite $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$ ne contient pas le zéro. Ainsi *le domaine Ω est holoïde*, à condition que nous démontrions (4°) que l'équation

$$(0) \qquad A\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ x; & u \end{pmatrix} X\begin{pmatrix} \xi & \xi' \\ x; & u \end{pmatrix} \equiv B\begin{pmatrix} \beta & \beta' \\ x; & u \end{pmatrix},$$

où l'inconnue est la forme mixte X, n'est pas toujours résoluble, quelles que soient A et B.

On devra avoir évidemment $\xi = \beta - \alpha$, $\xi' = \beta' - \alpha'$. Or il suffit de faire : $\alpha = 1$, $\alpha' = 0$, $A = x_1$; $\beta = 2$, $\beta' = 0$; $\xi = 1$, $\xi' = 0$; $B = x_2^2$ pour voir que l'équation (0) devient impossible.

26° Théorème. — *Soient deux formes mixtes* A *et* B, *avec* $A \not\equiv 0$. *Si* $AB \equiv 0$, $B \equiv 0$.

Divisons A et B par le binome ω en x_1. On aura (comme au 22°)

$$u_1^{\alpha} A\begin{pmatrix}\alpha & \alpha' \\ x; & u\end{pmatrix} = \omega \mathcal{A}\begin{pmatrix}\alpha-1 & \alpha+\alpha'-1 \\ x\;; & u\end{pmatrix} + \mathfrak{A}^{(1)}\begin{pmatrix}\alpha & \alpha+\alpha' \\ x; & u\end{pmatrix},$$

$$u_1^{\beta} B\begin{pmatrix}\beta & \beta' \\ x; & u\end{pmatrix} = \omega \mathcal{B}\begin{pmatrix}\beta-1 & \beta+\beta'-1 \\ x\;; & u\end{pmatrix} + \mathfrak{B}^{(1)}\begin{pmatrix}\beta & \beta+\beta' \\ x; & u\end{pmatrix},$$

où $\mathfrak{A}^{(1)}$ et $\mathfrak{B}^{(1)}$ sont des termes d'un domaine $E(N-1, N)$ (21°).

Ensuite

$$u_1^{\alpha+\beta} AB = \omega(\ldots) + \mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{B}^{(1)},$$

$$u_1^{\alpha+\beta} AB \equiv \mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{B}^{(1)} \equiv 0.$$

Pour les formes mixtes sans x_1, la congruence (mod ω) et l'égalité ne diffèrent pas, puisque les variables autres que x_1 peuvent être envisagées comme indépendantes (21°). Donc $\mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{B}^{(1)} = 0$. Or $\mathfrak{A}^{(1)} \neq 0$, sans quoi ω diviserait A et l'on aurait $A \equiv 0$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc $\mathfrak{B}^{(1)} = 0$, ω divise B et $B \equiv 0 \pmod{\omega}$ C. Q. F. D.

Soit K une constante telle que $KA \equiv A$, où d'ailleurs $A \not\equiv 0$. On aura $(K-1)A \equiv 0$ et $K = 1$. Cela démontre (25°) que dans l'algèbre des connexes le module de la multiplication est l'unité ordinaire.

27° La forme mixte $C\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \alpha'+\beta' \\ x\;; & u\end{pmatrix}$ est *divisible* (mod ω) par la forme mixte $A\begin{pmatrix}\alpha & \alpha' \\ x; & u\end{pmatrix}$, s'il existe dans le domaine Ω une forme mixte $B\begin{pmatrix}\beta & \beta' \\ x; & u\end{pmatrix}$ telle que

$$C \equiv AB \pmod{\omega}.$$

Une forme mixte est *irréductible* (mod ω) si elle n'est divisible (mod ω) que par elle-même ou par une constante.

Un facteur, forme mixte, est *premier* (mod ω) si, divisant (mod ω) un produit de deux facteurs, il divise (mod ω) un des facteurs au moins.

28° Le but principal du présent travail est de rechercher si le domaine Ω est *complet*, autrement dit de répondre à la question suivante (7°) :

Soient A et B deux formes mixtes quelconques; existe-t-il une forme mixte D, qui, divisant (mod ω) A et B, soit elle-même divisible (mod ω) par tout diviseur (mod ω) commun à A et B?

D sera le plus grand commun diviseur (mod ω) des deux formes A et B.

29° Soient A, B, C, D quatre formes mixtes, avec les ordres α, β, γ δ et les classes $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Les deux *fractions*

$$\frac{B}{A} \quad \text{et} \quad \frac{D}{C},$$

seront équivalentes ou congrues, suivant le module ω, si

$$\frac{B}{A} \equiv \frac{D}{C},$$

c'est-à-dire

$$AD - BC \equiv 0.$$

On supposera, bien entendu, toujours

$$(0) \qquad \begin{cases} \alpha + \delta = \beta + \gamma, \\ \alpha' + \delta' = \beta' + \gamma'. \end{cases}$$

Une fraction pourra être équivalente à une forme mixte, si le dénominateur divise (mod ω) le numérateur.

L'addition et la multiplication des fractions se feront, à l'équivalence près, par les règles ordinaires :

$$\frac{B}{A} + \frac{D}{C} \equiv \frac{AD + BC}{AC}; \qquad \frac{B}{A}\frac{D}{C} \equiv \frac{BD}{AC}$$

toujours eu égard à (0).

On pourra parler de *réduire une fraction à sa plus simple expression* seulement après qu'on aura montré que le domaine Ω est complet.

30° Étudions d'un peu plus près la structure d'une forme mixte F, ayant l'ordre m et la classe m'.

Chaque terme de F s'obtient en multipliant par un *coefficient* constant a une expression telle que

$$\varpi = \prod_{ij} u_i^{\mu_i} x_j^{\lambda_j} \qquad \begin{matrix} i = \\ j = \end{matrix} \Big\} 1, 2, \ldots, N,$$

$$m = \sum_j \lambda_j; \qquad m' = \sum_i \mu_i.$$

ϖ sera l'*argument* du terme dont a est le *coefficient*.

Combien F a-t-il de termes? Un polynome homogène, de degré m, à N variables a

$$\varphi(m) = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+N-1)}{(N-1)!}$$

termes. F contient donc

$$\varphi(m)\,\varphi(m')$$

termes.

Nommons forme mixte *générale* d'ordre m et de classe m' et écrivons

$$F\begin{pmatrix} m & m' & \\ x; & u; & a \end{pmatrix},$$

la forme mixte, où les $\varphi(m)\varphi(m')$ coefficients a ont des valeurs arbitraires.

On obtient *toute* forme mixte, ayant m pour ordre et m' pour classe, en attribuant aux coefficients a des valeurs particulières convenables.

31° L'équivalence amène naturellement à étudier, parmi les propriétés permanentes d'une forme, les *invariants* et aussi l'expression la plus simple sous laquelle la forme pourra être mise.

C'est la matière du Chapitre suivant.

CHAPITRE III.

INVARIANTS ET RÉSIDUELLE D'UNE FORME MIXTE.

32° Soit la forme mixte *générale* (30°)

$$F\begin{pmatrix} m & m' & \\ x; & u; & a \end{pmatrix}.$$

Exprimons que l'expression F est $\equiv 0 \pmod{\omega}$, c'est-à-dire divisible par ω.

Un premier procédé consiste (22°) à diviser le polynome F en x_1 par le binome ω en x_1. On a, comme au 22°,

$$u_1^m F = \omega Q + R;$$

les coefficients de Q et de R sont des fonctions linéaires et homogènes des a, à coefficients numériques et connus avec m et m'.

Pour exprimer la divisibilité de F par ω, il faut égaler à zéro les coefficients de tous les termes du reste R, et de ceux des termes de Q, où l'argument (30°) n'est pas divisible par u_1^m.

Cela fournit entre les $\varphi(m)\,\varphi(m')$ (30°) coefficients a un système $\mathfrak{W}$ de relations linéaires, homogènes, à coefficients numériques et connus, pour m et m' donnés.

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)\varphi(m')}$ un système de constantes satisfaisant au système $\mathfrak{W}$. Le quotient $F : \omega = Q : u_1^m$ *s'en déduira sans ambiguïté.*

Nous allons maintenant résoudre le même problème par

une autre méthode. Le premier procédé a uniquement pour but de montrer que *la division de* F *par* ω, *si elle est possible, est une opération univoque.*

33° La condition nécessaire et suffisante pour que ω divise F est celle-ci : on peut choisir les $\varphi(m-1)\varphi(m'-1)$ coefficients b d'une forme $Q(x; u; b)$ d'ordre $m-1$ et de classe $m'-1$ de façon à avoir l'identité

$$(0) \qquad F\begin{pmatrix} m & m' & \\ x; & u; & a \end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x; & u \end{pmatrix} Q\begin{pmatrix} m-1 & m'-1 & \\ x & ; \quad u & ; \quad b \end{pmatrix}.$$

L'identification des deux membres de (0) donne les $\varphi(m)\varphi(m')$ relations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_\lambda = \sum_\mu b_\mu l_{\lambda\mu} \\ \lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ \varphi(m)\varphi(m') \\ \mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ \varphi(m-1)\varphi(m'-1) \end{array} \right\},$$

où les $l_{\lambda\mu}$ sont des entiers nuls ou positifs, connus dès que m et m' sont donnés.

Considérons le tableau L, à $\varphi(m)\varphi(m')$ lignes et à $\varphi(m-1)\varphi(m'-1)$ colonnes, constitué par les entiers $l_{\lambda\mu}$,

$$L = \| l_{\lambda\mu} \|.$$

Nommons $\mathfrak{L}$ le rang du tableau L; $\mathfrak{L}$ ne peut dépasser $\varphi(m-1)\varphi(m'-1)$.

Je dis que $\mathfrak{L}$ *atteint effectivement son maximum*

$$\varphi(m-1)\varphi(m'-1).$$

En effet, supposons qu'il en soit autrement. Dans les relations (1) on pourra, sans annuler tous les b, annuler tous les a. La forme Q ne s'évanouirait pas, tandis que le produit $F = \omega Q$ s'évanouirait, ce qui est absurde. Ainsi :

$$\mathfrak{L} = \varphi(m-1)\varphi(m'-1).$$

34° $\mathcal{L}$ ayant la valeur ci-dessus indiquée, on peut numéroter les a_λ de façon que dans le tableau L (33°) le déterminant obtenu en prenant les $\varphi(m-1)\varphi(m'-1)$ premières lignes soit $\neq 0$. Alors, dans le système (1) du 33°, on tirera les b_μ, en fonction des a_μ, des $\varphi(m-1)\varphi(m'-1)$ premières équations. On portera ces valeurs dans les

$$\mathfrak{M}(m, m') = \varphi(m)\varphi(m') - \varphi(m-1)\varphi(m'-1)$$

équations restantes et l'on aura les $\mathfrak{M}(m, m')$ équations entre les a_λ

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta_\alpha(a) = a_{\varphi(m-1)\varphi(m'-1)+\alpha} - \sum\limits_\mu d_{\alpha\mu} a_\mu = 0, \\ \mu = 1, 2, \ldots, \quad \ldots, \quad \varphi(m-1)\varphi(m'-1) \\ \alpha = 1, 2, \ldots, \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}(m, m') \end{array}\right\}.$$

Elles sont toutes distinctes, car le coefficient

$$a_{\varphi(m-1)\varphi(m'-1)+\alpha}$$

ne figure que dans $\Delta_\alpha(a) = 0$. Les $d_{\alpha\mu}$ sont des nombres rationnels parfaitement connus dès qu'on donne l'ordre m et la classe m' de F.

Ainsi : *les* $\mathfrak{M}(m, m')$ *équations* $\Delta_\alpha(\alpha) = 0$ *sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que* F *soit divisible par* ω. Elles sont le résultat de l'élimination, entre les $\varphi(m)\varphi(m')$ équations (1) du 33°, des $\varphi(m-1)\varphi(m'-1)$ inconnues b_μ.

35° Les $\mathfrak{M}(m, m')$ expressions Δ_α sont les *invariants* de F. On verra plus bas (40°) la raison de cette dénomination. On peut dire : *pour qu'une forme* $F\begin{pmatrix} m & m \\ x\,; & u \end{pmatrix}$ *soit divisible par* ω, *il faut et il suffit que* F *ait tous ses invariants nuls.*

Des équations (2) du 34° on tire

$$a_{\varphi(m-1)\varphi(m'-1)+\alpha} = \Delta_\alpha(a) + \sum_\mu d_{\alpha\mu} a_\mu,$$

et, portant dans F ces expressions des coefficients a, on a finalement

$$(3)\quad \begin{cases} F = \sum_\alpha \Delta_\alpha(a)\Phi_\alpha\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix} + \sum_\mu a_\mu Q'_\mu \begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix}, \\ \alpha = 1, 2, \ldots, \mathfrak{M}(m, m'), \\ \mu = 1, 2, \ldots, \varphi(m-1)\varphi(m'-1), \end{cases}$$

où les Φ_α et Q'_μ sont des formes à coefficients numériques et rationnels; Φ_α et Q'_μ doivent être considérées comme connues dès que m et m' sont donnés.

F est divisible par ω dès que tous les invariants Δ_α sont nuls, et cela quels que soient les α_μ, notamment quand tous les α_μ sont nuls, sauf un. Donc Q'_μ est divisible par ω, et il vient

$$F = \sum_\alpha \Delta_\alpha \Phi_\alpha + \omega \sum_\mu a_\mu Q\begin{pmatrix} m-1 & m'-1 \\ x; & u \end{pmatrix}.$$

36° Simplifions les notations en écrivant simplement a_α pour désigner l'invariant $\Delta_\alpha(a)$.

Toute forme F peut s'écrire

$$(4)\qquad F = \sum_\alpha a_\alpha \Phi_\alpha + \omega P\begin{pmatrix} m-1 & m'-1 \\ x; & u \end{pmatrix},$$

où les a_α sont les invariants, Φ_α des formes données avec m et m' donnés, et P une forme quelconque.

L'expression

$$\overline{F} = \sum_\alpha a_\alpha \Phi_\alpha$$

sera la *résiduelle* de F; les Φ_α sont *les résiduelles élémentaires pour l'ordre m et la classe m'*.

On voit que

$$F \equiv \overline{F} \pmod{\omega}.$$

Dans le domaine Ω (Chapitre II), une forme mixte F n'intervient que par sa résiduelle, c'est-à-dire par ses invariants.

car les résiduelles élémentaires Φ_α sont, pour m et m' donnés, les mêmes pour toutes les formes mixtes.

37° Soit une forme mixte

$$F = ef + e'f' + \ldots,$$

où e, e', ..., sont des constantes, et f, f', ..., sont des formes de mêmes ordre et classe que F; alors l'invariant d'indice α pour F est évidemment

$$ea_\alpha + e'a'_\alpha + \ldots,$$

a_α, a'_α, ... étant les invariants pour f, f', ...

Théorème. — *Les* $\mathfrak{M}(m, m')$ *résiduelles élémentaires* Φ_α *sont linéairement indépendantes.*

Supposons, en effet, que l'on ait

$$\sum_\alpha K_\alpha \Phi_\alpha = 0,$$

une au moins des constantes K_α étant $\neq 0$. La forme

$$F = \sum_\alpha K_\alpha \Phi_\alpha$$

a les K_α pour invariants; F serait identiquement nulle, c'est-à-dire divisible par ω, sans avoir tous ses invariants nuls. Cela est absurde (35°).

38° Théorème. — *Pour que deux formes mixtes, d'ordre m et de classe m',* F *et* G *soient équivalentes, il faut et il suffit que les invariants soient égaux, ou que les résiduelles soient identiques.*

Soient, en effet,

$$\overline{F} = \sum_\alpha a_\alpha \Phi_\alpha, \qquad \overline{G} = \sum_\alpha \mathrm{a}_\alpha \Phi_\alpha$$

les deux résiduelles, où a_α et a_α désignent les invariants.

On a

$$\mathrm{F} \equiv \overline{\mathrm{F}}, \qquad \mathrm{G} \equiv \overline{\mathrm{G}} \pmod{\omega}$$

et

$$\mathrm{G} - \mathrm{F} \equiv \overline{\mathrm{G}} - \overline{\mathrm{F}} = \sum_{\alpha} (\mathrm{a}_\alpha - a_\alpha)\Phi_\alpha = (\overline{\mathrm{G} - \mathrm{F}}).$$

Pour que $\mathrm{G} - \mathrm{F}$ soit $\equiv 0 \pmod{\omega}$, il faut et il suffit qu'elle ait tous ses invariants $\mathrm{a}_\alpha - a_\alpha$ (37°) nuls, alors

$$\mathrm{a}_\alpha = a_\alpha \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{G}} = \overline{\mathrm{F}}.$$

C. Q. F. D.

39° Reprenons (34°) les $\mathfrak{M}(m, m')$ équations

$$\{\alpha = 1, 2, \ldots, \mathfrak{M}(m, m')\}, \qquad \Delta_\alpha(a) = 0,$$

qui expriment que F est divisible par ω. Il est indifférent d'écrire aussi

$$\sum_{\alpha'} r_{\alpha\alpha'} \Delta_{\alpha'}(a) = 0,$$
$$\alpha' = 1, 2, \ldots, \mathfrak{M}(m, m'),$$

pourvu que la matrice $[\mathfrak{M}(m, m')]$-aire

$$\mathrm{R} = [r_{\alpha\alpha'}]$$

ait son déterminant

$$|\mathrm{R}| \neq 0,$$

et définisse, par suite, une collinéation.

Il en résulte que *les invariants et les résiduelles élémentaires ne sont définis qu'à une collinéation* $[\mathfrak{M}(m, m')]$*-aire près*. Mais une fois cette collinéation choisie, les résiduelles élémentaires sont connues sans ambiguïté, et les invariants d'une forme mixte donnée deviennent calculables sans ambiguïté.

40° Dans l'espace, lieu de l'élément (x, u) (19°), effectuons sur les x une collinéation au changement de coordonnées

$$x = \mathrm{S}[y], \qquad x_j = \sum_{j'} s_{jj'} y_{j'}$$
$$(j, j' = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}),$$

où la matrice N-aire

$$S = [s_{jj'}]$$

a son déterminant

$$|S| = 1.$$

Comme la situation réunie du point x et du plan u est un invariant, la collinéation S se traduit sur les u par la collinéation

$$u = S'^{-1}[v]$$

inverse de la transposée de S.

Il vient alors (32°)

$$F\begin{pmatrix} m & m' & \\ x; & u; & a \end{pmatrix} = F(S[y]; S'^{-1}[v]; a) = \mathcal{F}\begin{pmatrix} m & m' & \\ y; & v; & a' \end{pmatrix}.$$

On a évidemment (notations du 33°)

$$(0) \qquad \left\{ \begin{array}{c} a'_{\lambda} = \sum_{\lambda'} p_{\lambda\lambda'} a_{\lambda'} \\ \lambda, \lambda' = 1, 2, \ldots, \varphi(m)\varphi(m') \end{array} \right\},$$

ou symboliquement

$$a' = P[a],$$

P étant la matrice $[\varphi(m)\varphi(m')]$-aire

$$P = [p_{\lambda\lambda'}],$$

où les $p_{\lambda\lambda'}$ sont des fonctions connues des coefficients $s_{jj'}$ de S.

On peut exprimer (35°) tous les a_{λ} à l'aide des a_{μ},

$$\{\mu = 1, 2, \ldots, \varphi(m-1)\varphi(m'-1)\},$$

et des $\mathfrak{M}(m, m')$ invariants $\Delta_{\alpha}(a)$, où

$$\alpha = 1, 2, \ldots, \mathfrak{M}(m, m').$$

Eu égard aux égalités (0) ci-dessus, on pourra écrire

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \Delta_{\alpha}(a') = \sum_{\alpha'} h_{\alpha\alpha'} \Delta_{\alpha'}(a) + \sum_{\mu} g_{\alpha\mu} a_{\mu} \\ \alpha' = 1, 2, \ldots, \mathfrak{M}(m, m') \end{array} \right\}.$$

Or F et $\mathfrak{F}$ sont simultanément divisibles par ω. Donc, si tous les $\Delta_\alpha(a)$ sont nuls, tous les $\Delta_\alpha(a')$ sont nuls aussi, et cela quels que soient les a_μ, notamment quand tous les a_μ sont nuls, sauf un. Ainsi

$$g_{\alpha\mu} = 0.$$

D'autre part, les $\Delta_\alpha(a')$ ne peuvent être tous nuls que si tous les $\Delta_\alpha(a)$ le sont; donc, eu égard aux relations (1) et $g_{\alpha\mu} = 0$, on constate ceci : la matrice $[\mathfrak{M}(m, m')]$-aire

$$H = [h_{\alpha\alpha'}]$$

a son déterminant

$$|H| \neq 0,$$

et il vient symboliquement

$$\Delta(a') = H[\Delta(a)].$$

En résumé, *tout changement de coordonnées se traduit sur les invariants, ou sur les résiduelles élémentaires, par une certaine collinéation* $[\mathfrak{M}(m, m')]$*-aire, ce qui* (39°) *peut être considéré comme indifférent.*

Ainsi *la résidualité est une propriété projective,* et il en est de même pour les formations (linéaires, homogènes, à coefficients numériques) des coefficients de la forme mixte F, formations que l'on a nommées *invariants* $\Delta_\alpha(a)$. C'est la justification du nom d'invariants.

41° Comme application, construisons les résiduelles élémentaires dans quelques cas simples.

Prenons d'abord une forme mixte F linéo-linéaire

$$m = m' = 1.$$

Alors

$$\varphi(m) = \varphi(1) = \varphi(m') = \frac{2.3\ldots N}{(N-1)!} = N,$$

$$\varphi(m)\,\varphi(m') = N^2$$

(ainsi qu'on l'a vu au 30°);

$$\varphi(m-1) = \varphi(m'-1) = \varphi(0) = 1.$$

Alors (34°)

$$\mathfrak{M}(m, m') = \varphi(m)\varphi(m') - \varphi(m-1)\varphi(m'-1) = N^2 - 1.$$

Il y a $N^2 - 1$ invariants et autant de résiduelles élémentaires.

Soit

$$F = \sum_{ij} c_{ij} u_i x_j; \qquad \{ i, j = 1, 2, \ldots, N \}.$$

On doit avoir

$$F - c_{11}\omega = 0,$$

ce qui introduit

les $N(N-1)$ invariants c_{ij}, $i \neq j$,

les $N - 1$ invariants $c_{11} - c_{ii}$, $i \neq 1$,

c'est-à-dire bien $N^2 - 1$ invariants.

Les résiduelles élémentaires sont

les $N(N-1)$ expressions $u_i x_j$, $i \neq j$,

et

les $N - 1$ expressions $x_1 u_1 - x_i u_i$.

42° Prenons le cas

$$N = 2, \qquad m = 2, \qquad m' = 1; \qquad \varphi(m) = m + 1;$$
$$\varphi(m)\varphi(m') = \varphi(2)\varphi(1) = 3.2 = 6;$$
$$\varphi(m-1)\varphi(m'-1) = \varphi(1)\varphi(0) = 2;$$
$$\mathfrak{M}(m, m') = \mathfrak{M}(2, 1) = 4.$$

On peut écrire

$$F = u_1 x_1 (c_1 x_1 + c_2 x_2) + u_2 x_2 (d_1 x_1 + d_2 x_2) + K u_1 x_2^2 + L u_2 x_1^2.$$

Il faut avoir

$$\begin{aligned} 0 &= F - \omega(d_1 x_1 + d_2 x_2) \\ &= u_1 x_1 \{(c_1 - d_1) x_1 + (c_2 - d_2) x_2\} + K u_1 x_2^2 + L u_2 x_1^2. \end{aligned}$$

Les quatre résiduelles élémentaires sont

$$u_1 x_1^2, \quad u_1 x_2^2, \quad u_2 x_1^2, \quad u_1 x_1 x_2.$$

c'est-à-dire (en vertu de la relation

$$\omega = x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0, \qquad u_1 = x_2, \qquad u_2 = -x_1)$$

ce sont

$$x_1^3, \quad x_2^3, \quad x_1^2 x_2 \quad x_1 x_2^2.$$

43° On a vu que l'on peut écrire (36°)

$$F\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix} = F_0\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix} + \omega P\begin{pmatrix} m-1 & m'-1 \\ x; & u \end{pmatrix},$$

où F_0 est la résiduelle $\overline{F}$ de F. On peut appeler résiduelle d'ordre m et de classe m' toute expression

$$\mathfrak{R}_{mm'} = \sum_\alpha K_\alpha \Phi_\alpha,$$

combinaison linéaire, homogène, à coefficients constants K_α, des résiduelles élémentaires Φ. En effet, $\mathfrak{R}_{mm'}$ est la résiduelle de la forme mixte, où les K_α sont les invariants.

Il est évident que *toute résiduelle divisible par* ω *est identiquement nulle.*

Ainsi on écrira

$$F\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix} = \mathfrak{R}_{mm'} + \omega P\begin{pmatrix} m-1 & m'-1 \\ x; & u \end{pmatrix}.$$

Mais, de même,

$$P = \mathfrak{R}_{m-1, m'-1} + \omega Q\begin{pmatrix} m-2 & m-2 \\ x; & u \end{pmatrix},$$

et ainsi de suite. Bref, il viendra la formule très importante pour la suite

$$(\sigma) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F = \sum_s \omega^s \mathfrak{R}_{m-s, m'-s}, \\ s = 0, 1, \ldots, \mathfrak{M}, \end{array} \right.$$

où $\mathfrak{M}$ est le plus petit des deux nombres m et m'.

Écrire F sous cette forme, ce sera *ordonner* F *par rapport aux puissances de* ω.

Cette opération est univoque. Supposons en effet

$$F = A_0 + \omega A_1 + \omega^2 A_2 + \ldots = B_0 + \omega B_1 + \ldots.$$

Il faut avoir

$$A_0 - B_0 \equiv 0 \pmod{\omega}.$$

Mais $A_0 - B_0$ est une $\mathfrak{N}_{mm'}$, donc

$$A_0 - B_0 = 0 \quad \text{et} \quad A_0 = B_0.$$

Après départ du facteur ω, on aura de même

$$A_1 - B_1 \equiv 0 \pmod{\omega},$$

et comme $A_1 - B_1$ est une $\mathfrak{N}_{m-1,m'-1}$, on a encore

$$A_1 = B_1 \ldots.$$

44° On est maintenant à même de montrer que le domaine holoïde Ω est complet et bien défini. Ce sera l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

DOMAINE HOLOÏDE ET COMPLET Ω DES FORMES MIXTES.

45° Posons

$$-\zeta = x_2 u_2 + x_3 u_3 + \ldots,$$

de façon que

$$\omega = x_1 u_1 - \zeta \qquad \text{et} \qquad u_1 x_1 \equiv \zeta \qquad (\text{mod}\,\omega).$$

Désignons par $F^{(1)}$ une forme mixte où x_1 ne figure pas. Les $F^{(1)}$ constitueront un domaine complet $E(N-1, N)$ au sens du Chapitre II. Nommons $F^{(11)}$ une forme mixte où ne figurent ni x_1 ni u_1. Les $F^{(11)}$ constitueront un domaine complet $E(N-1, N-1)$, au sens du Chapitre II (21°).

Vis-à-vis des $2N-2$ variables $x_2, x_3, \ldots, u_2, u_3, \ldots$, qui figurent dans les $F^{(11)}$, la formation ζ joue le même rôle que la formation ω vis-à-vis des $2N$ variables qui figurent dans une forme mixte F.

On pourra donc, et d'une seule façon (43°), ordonner toute $F^{(11)}$ par rapport aux puissances de ζ et écrire

$$F^{(11)} = A_0^{(11)} + \zeta A_1^{(11)} + \ldots,$$

les $A^{(11)}$ étant des résiduelles à $2N-2$ variables.

Entre expressions $F^{(1)}$ ou $F^{(11)}$, toute congruence $(\text{mod}\,\omega)$ est une égalité ordinaire. Les $F^{(1)}$ et les $F^{(11)}$, appartenant aux domaines complets $E(N-1, N)$ ou $E(N-1, N-1)$, suivent les règles de l'Algèbre ordinaire.

46° Soit F une forme mixte quelconque d'ordre m et de classe m'.

Je me propose d'étudier la divisibilité (mod ω) de F par u_1, lequel est un facteur irréductible (mod ω).

Mettons, dans F, u_1 en facteur dans les termes où il figure. Il viendra

$$F = u_1(\ldots) + F_1;$$

F_1 ne contenant plus u_1 est un polynome en x_1 à coefficients du type $F^{(11)}$. Chacun de ces coefficients peut être ordonné suivant les puissances de ζ. Enfin on écrira

$$F = u_1(\ldots) + \zeta(\ldots) + F',$$

$$F' = x_1^\rho A_\rho + x_1^{\rho-1} A_{\rho-1} + \ldots,$$

où les A sont des résiduelles du type $F^{(11)}$.

La formation F′ est permanente (24°), car elle ne se modifie pas quand on ajoute à F l'expression

$$\omega P\begin{pmatrix} m-1 & m'-1 \\ x_1 & u \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad u_1.x_1 P - \zeta P,$$

où P est quelconque.

47° Pour que u_1 divise (mod ω) la forme mixte F, il faut et il suffit, par définition, que

$$F = u_1(\ldots) + \omega(\ldots) = u_1(\ldots) + \zeta(\ldots).$$

Si F′ = 0, F est divisible (mod ω) par u_1. Je dis que la condition suffisante est aussi nécessaire.

Si, en effet, u_1 divise (mod ω) F, alors F = 0 dès que $u_1 = \zeta = 0$, et cela quel que soit x_1. Donc, pour ζ = 0, on a (46°)

$$0 = A_\rho = A_{\rho-1} = \ldots.$$

Mais les A étant des résiduelles du type $F^{(11)}$, ne peuvent être ≡ 0 (mod ζ) qu'étant identiquement nulles.

Ainsi : F′ = 0 *est la condition nécessaire et suffisante pour la divisibilité* (mod ω) *de* F *par* u_1.

48° Prenons, comme au 46°,

$$\begin{aligned}
A &= u_1(\ldots) + \zeta(\ldots) + A',\\
B &= u_1(\ldots) + \zeta(\ldots) + B';\\
A' &= x_1^\rho A_\rho^{(11)} + x_1^{\rho-1} A_{\rho-1}^{(11)} + \ldots,\\
B' &= x_1^\sigma B_\sigma^{(11)} + x_1^{\sigma-1} B_{\sigma-1}^{(11)} + \ldots,
\end{aligned}$$

deux formes mixtes dont aucune n'admet (mod ω) le diviseur u_1 : alors

$$A' \not\equiv 0, \qquad B' \not\equiv 0, \qquad A_\rho^{(11)} \not\equiv 0, \qquad B_\sigma^{(11)} \not\equiv 0.$$

On aura

$$AB = u_1(\ldots) + \zeta(\ldots) + A'B',$$
$$A'B' = x_1^{\rho+\sigma} A_\rho^{(11)} B_\sigma^{(11)} + x_1^{\rho+\sigma-1}(\ldots) + \ldots.$$

Si l'on veut rendre AB divisible (mod ω) par u_1, il faut (47°) écrire que $AB = 0 = A'B'$ pour $u_1 = \zeta = 0$. $A'B'$ ne contient pas u_1. Donc sont $\equiv 0$ (mod ζ) tous les coefficients des puissances de x_1 dans $A'B'$; notamment $A_\rho^{(11)} B_\sigma^{(11)} \equiv 0$ (mod ζ). Or cela exige (26°), ou $A_\rho^{(11)} = 0$ (mod ζ) ou $B_\sigma^{(11)} \equiv 0$ (mod ζ), c'est-à-dire $A_\rho^{(11)} = 0$ ou $B_\sigma^{(11)} = 0$, ce qui n'est pas. Alors le facteur irréductible u_1 ne peut diviser (mod ω) le produit AB, sans diviser (mod ω) soit A, soit B.

Nous pouvons ainsi formuler une importante proposition.

Théorème. — *Le facteur u_1, qui est irréductible* (mod ω), *est aussi premier* (mod ω) (6°).

49° Soit $a\begin{pmatrix} m & M' \\ x; & u \end{pmatrix}$ une forme mixte du type $F^{(1)}$ (c'est-à-dire sans x_1) non divisible par u_1.

Supposons que a soit divisible (mod ω) par u_1^p sans l'être par u_1^{p+1}. On dira que p est la *catégorie* de a.

La catégorie est évidemment une propriété permanente. La recherche de la catégorie se fait sans difficulté ni ambiguïté par la théorie qui vient d'être expliquée (46°, 47°, 48°). Si a est divisible par u_1 (mod ω), on écrira

$$a \equiv u_1 a_1;$$

si u_1 divise (mod ω) encore a_1, on aura

$$a_1 \equiv u_1 a_2 \qquad \text{et} \qquad a \equiv u_1^2 a_2,$$

et ainsi de suite.

Le quotient (mod ω) de a par u_1^p sera une forme mixte A, telle que

$$u_1^p \mathrm{A}\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix} \equiv a\begin{pmatrix} m & \mathrm{M}' \\ x; & u \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{mod}\, \omega),$$

d'où

$$\mathrm{M}' = m' + p.$$

A n'admet plus u_1 pour diviseur (mod ω), sinon la catégorie serait supérieure à p.

50° La division (mod ω) de a par u_1^p est une opération univoque (à l'équivalence près), car, si l'on avait à la fois

$$u_1^p \mathrm{A} \equiv a \equiv u_1^p \mathrm{A}',$$

il viendrait

$$0 \equiv u_1^p (\mathrm{A}' - \mathrm{A}),$$

et comme $u_1 \not\equiv 0$, $\mathrm{A}' \equiv \mathrm{A}$ (mod ω) (26°).

Prenons maintenant une forme mixte quelconque

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix},$$

non divisible (mod ω) par u_1.

Supposons que A, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x_1, débute par la puissance x_1^p, $p \leq m$; alors

$$\mathrm{A} = x_1^p \mathrm{K} + x_1^{p-1} \mathrm{L} + \ldots,$$
$$\mathrm{K}, \mathrm{L}, \ldots = \text{formes du type } \mathrm{F}^{(1)}.$$

Si K est divisible par u_1, $\mathrm{K} = u_1 \mathfrak{K}$, on aura

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{A} - \omega x_1^{p-1} \mathfrak{K} = \mathrm{A} - x_1^{p-1} \mathfrak{K}(u_1 x_1 - \zeta) = x_1^{p-1}(\ldots) + \ldots$$

et ainsi de suite. Bref, eu égard à l'équivalence, on pourra admettre que K n'est pas divisible par u_1. Alors

$$u_1^p \mathrm{A} = \mathrm{K}(u_1 x_1)^p + \mathrm{L} u_1 (u_1 x_1)^{p-1} + \ldots.$$

Mais (45°)

$$u_1 x_1 \equiv \zeta \qquad (\bmod \omega)$$

et

$$u_1^p \mathrm{A} \equiv \mathrm{K}\zeta^p + \mathrm{L} u_1 \zeta^{p-1} + \ldots = a \qquad (\bmod \omega),$$

a étant une forme du type $\mathrm{F}^{(1)}$. D'ailleurs a n'est pas divisible par u_1, puisque K ne l'est pas.

Supposons que, par un procédé quelconque, on ait obtenu un entier q, non négatif, et une forme b, du type $\mathrm{F}^{(1)}$, non divisible (mod ω) par u_1, tels qu'on ait

$$u_1^q \mathrm{A} \equiv b.$$

Il viendrait alors

$$u_1^{p+q} \mathrm{A} \equiv u_1^p b \equiv u_1^q a.$$

Si $q \neq p$, u_1 diviserait (mod ω) soit a, soit b. Donc $p = q$ et $a \equiv b$. Comme a et b sont du type $\mathrm{F}^{(1)}$, il vient $a = b$.

En résumé, pour A donnée à l'équivalence près, l'entier p et l'expression a sont connus sans ambiguïté.

a a évidemment m pour ordre, $m' + p$ pour classe. Nommons p' la catégorie de a. Il viendra à la fois [$\mathfrak{A}$ étant le quotient (mod ω) de a par $u_1^{p'}$]

$$u_1^p \mathrm{A} \equiv a \qquad \text{et} \qquad u_1^{p'} \mathfrak{A} \equiv a \qquad (49°),$$

c'est-à-dire

$$u_1^p \mathrm{A} \equiv u_1^{p'} \mathfrak{A}.$$

Si $p' \neq p$, il faudrait qu'une des deux formes mixtes A et $\mathfrak{A}$ fût divisible (mod ω) par u_1, ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi, $p' = p$ et $\mathrm{A} \equiv \mathfrak{A}$.

Pour a donnée, l'entier p et la forme A sont donc connus à l'équivalence près. p sera la *catégorie* indifféremment soit de a, soit de A.

51° Nous pouvons donc énoncer la proposition que voici :

Théorème. — *A toute forme mixte* A, *ayant* m *pour ordre et* m' *pour classe, correspondent sans ambiguïté un entier non négatif* α *(la catégorie) et une forme* a, *du*

type $F^{(1)}$, *telle que* $u_1^\alpha A \equiv a \pmod{\omega}$. *a est d'ordre m et de classe* $m' + \alpha$.

Réciproquement : *Si l'on se donne a, la catégorie α et la forme A s'obtiennent sans ambiguïté, à l'équivalence près.*

Il doit être spécifié : 1° *que* A *n'est pas divisible* (mod ω) *par* u_1 (*et alors a n'est pas divisible par* u_1); 2° *que a n'est pas divisible par* u_1 [*et alors* A *n'est pas divisible* (mod ω) *par* u_1].

On désignera dans la suite : une forme mixte, *non divisible* (*mod* ω) *par* u_1, par la majuscule latine A, par exemple; la catégorie, par la minuscule grecque α; la forme correspondante du type $F^{(1)}$, par la minuscule latine a.

52° Théorème. — *Pour que* A *divise* (mod ω) *la forme* C, *il faut et il suffit que a divise c.*

I. *La condition est nécessaire.* — En effet, s'il existe une forme B telle que $C \equiv AB \pmod{\omega}$, on aura

$$a \equiv a_1^\alpha A, \qquad b \equiv u_1^\beta B \qquad c \equiv u_1^\gamma C$$

et

$$u_1^{\alpha+\beta} c \equiv u_1^{\alpha+\beta+\gamma} C \equiv u_1^{\alpha+\beta+\gamma} AB \equiv u_1^\gamma ab.$$

Comme a, b, c sont du type $F^{(1)}$, il vient

$$u_1^{\alpha+\beta} c = u_1^\gamma ab.$$

u_1 ne divise ni a, ni b, ni c. Donc $\gamma = \alpha + \beta$ et $c = ab$.

C. Q. F. D.

Il ne peut d'ailleurs arriver que B, quotient (mod ω) de C par A, soit divisible (mod ω) par u_1, car alors u_1 diviserait aussi (mod ω) la forme C, ce qui est contre l'hypothèse.

II. *La condition est suffisante.* — Nommons b le quotient $c:a$. La forme mixte correspondante B n'est pas divisible (mod ω) par u_1 (51°). On a encore

$$a \equiv u_1^\alpha A, \qquad b \equiv u_1^\beta B, \qquad c = ab \equiv u_1^\gamma C,$$
$$ab = u_1^{\alpha+\beta} AB \equiv u_1^\gamma C.$$

Si $\alpha + \beta > \gamma$, u_1 divise (mod ω) la forme C, ce qui est contre l'hypothèse.

Si $\gamma > \alpha + \beta$, u_1 doit être un diviseur (mod ω) du produit AB. Or u_1 ne divise (mod ω) ni A, ni B; u_1 *est un facteur premier* (mod ω) (48°, *in fine*). AB ne peut admettre u_1 pour diviseur (mod ω).

Bref $\gamma = \alpha + \beta$ et $C \equiv AB$. C. Q. F. D.

La présente démonstration a un corollaire évident : *la catégorie d'un produit est la somme des catégories des facteurs.*

Dans cet énoncé il est indifférent d'entendre, soit la multiplication ordinaire pour les formes du type $F^{(1)}$, soit la multiplication (mod ω) pour les formes mixtes.

53° Soient A et B deux formes quelconques non divisibles (mod ω) par u_1 (51°, *in fine*). Nommons d, de catégorie δ, le p. g. c. d. de a et de b. d existera toujours, puisque le domaine constitué par les formes du type $F^{(1)}$ est complet (45°). Je dis que la forme mixte D, telle que

$$d \equiv u_1^{\delta} D \qquad (\text{mod}\, \omega),$$

est le p. g. c. d. (mod ω) de A et de B.

D'abord D, en vertu du théorème du 52°, est un diviseur (mod ω) commun à A et à B, puisque d divise a et b.

En second lieu, soit D', de catégorie δ', un diviseur (mod ω) commun à A et B. Le facteur d', tel que $d' \equiv u_1^{\delta'} D'$, divise (théorème du 52°) a et b, et aussi leur p. g. c. d. qui est d. Puisque d' divise d, *à son tour* (théorème du 52°) D' *divise* (mod ω) *la forme* D.

Ainsi D est le p. g. c. d. (mod ω) des deux formes A et B.

On écrira

$$(1) \qquad A \equiv DP, \qquad B \equiv DQ.$$

Multiplions maintenant A et B par u_1^{λ} et u_1^{μ}, $\lambda \leq \mu$, de façon à introduire les deux formes mixtes quelconques

$$L \equiv u_1^{\lambda} A \quad \text{et} \quad M \equiv u_1^{\mu} B.$$

Je dis que L et M admettent $\Delta \equiv u_1^\lambda D$ pour leur p. g. c. d. (mod ω).

En effet, d'abord [formule (1)],

$$L \equiv u_1^\lambda DP \quad \text{et} \quad M \equiv u_1^{\mu-\lambda} u_1^\lambda DQ,$$

et Δ divise (mod ω) tant L que M.

Soit, d'autre part, $H \equiv u_1^\rho R$ un diviseur (mod ω) commun à L et à M; cela est tout à fait général, en prenant, éventuellement, $\rho = 0$. Soient

$$u_1^\sigma S \equiv L : H \quad \text{et} \quad u_1^\tau T \equiv M : H.$$

On aura

$$L \equiv u_1^\lambda A \equiv u_1^{\rho+\sigma} RS, \qquad M \equiv u_1^\mu B \equiv u_1^{\rho+\tau} RT.$$

Alors

$$\rho = \lambda - \sigma = \mu - \tau, \qquad \rho \leqq \lambda;$$

$$A \equiv RS, \qquad B \equiv RT.$$

R, divisant (mod ω) A et B, divise (mod ω) leur p. g. c. d. D et H divise Δ. On a

$$\Delta : H \equiv u_1^{-\rho} G, \qquad G \equiv D : R.$$

54° On est maintenant à même d'énoncer la proposition capitale de la présente théorie.

Théorème. — *Le domaine holoïde Ω des formes mixtes est un domaine complet.*

Dans Ω :

Tout facteur irréductible est aussi un facteur premier;

Toute forme mixte est décomposable en un produit de facteurs premiers, et cela d'une façon unique à l'équivalence près; il y a des formes mixtes premières entre elles, c'est-à-dire dont le p. g. c. d. est d'ordre et de classe nuls, ou une constante;

Une fraction (29°) est réductible à sa plus simple expression;

Etc., etc.

L'algèbre des formes mixtes suit les règles de l'algèbre et de l'arithmétique ordinaires.

Pour la démonstration de toutes ces propriétés, nous renverrons au Livre de M. König.

55° On a dit (19°) que, dans une forme mixte

$$F\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & x \end{pmatrix},$$

les u_i et x_i étaient les coordonnées d'un élément. On a longuement tenu compte de la relation $\omega = 0$, mais on n'a pas parlé des relations

$$x_0 = \sum ex = 1, \qquad u_0 = \sum gu = 1,$$

qui fixent, pour le point x et le plan u, la valeur absolue des coordonnées homogènes x_i et u_i.

Cette omission affecte-t-elle le théorème capital du 54°?

Il est aisé de voir que non.

En effet, toutes les notions sur lesquelles s'appuie le théorème [équivalence, multiplication, division (mod ω), ...] se résolvent, en dernier ressort, en *identités ordinaires*, où les deux membres sont des formes (non plus mixtes, mais à $2N$ variables indépendantes x_i et u_i) de même ordre et de même classe. Ces identités ne sont pas troublées quand on remplace x_i et u_i respectivement par $x'_i = \rho x_i$ et $u'_i = \sigma u_i$, où ρ et σ sont des quantités quelconques, ni nulles ni infinies.

Il suffit de faire

$$\rho^{-1} \equiv \sum ex, \qquad \sigma^{-1} = \sum gu$$

pour satisfaire aux conditions

$$x'_0 = 1, \qquad u'_0 = 1,$$

sans changer l'élément (x, u) ni porter atteinte au théorème du 54°.

Nous ne ferons donc plus mention des sujétions

$$x_0 = 1, \qquad u_0 = 1.$$

CHAPITRE V.

DIVISEURS D'UNE FORME MIXTE DONNÉE.

56° Voici le problème qui va nous occuper : *trouver tous les diviseurs* (mod ω) *d'une forme mixte donnée, en ne faisant intervenir que les propriétés des invariants et des résiduelles élémentaires,* expliquées au Chapitre III, dont on gardera les notations et la terminologie.

Il suffira évidemment de résoudre ce problème : décomposer (mod ω) la forme mixte $C\begin{pmatrix} m+n & & m'+n' \\ x & ; & u \end{pmatrix}$ en un produit de deux formes mixtes

$$A\begin{pmatrix} m & m' \\ x\,; & u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B\begin{pmatrix} n & n' \\ x\,; & u \end{pmatrix},$$

d'ordres et de classes donnés.

57° Soient α, β, γ des indices prenant les valeurs 1, 2, 3, ... jusqu'à respectivement

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{M}(m, m') & \text{pour} & \alpha, \\ \mathfrak{M}(n, \;\; n') & \text{pour} & \beta, \\ \mathfrak{M}(m+n, m'+n') & \text{pour} & \gamma. \end{array}$$

On désignera respectivement par

Φ_α,	les résiduelles	élémentaires	d'ordre	m	et de classe	m';
Ψ_β	»	»	»	n	»	n';
Θ_γ	»	»	»	$m+n$	»	$m'+n'$;

a_α les invariants de A;

b_β » B;

c_γ » C.

De sorte que

$$\overline{A} = \sum_{\alpha} a_\alpha \Phi_\alpha, \qquad \overline{B} = \sum_{\beta} b_\beta \Psi_\beta, \qquad \overline{C} = \sum_{\gamma} c_\gamma \Theta_\gamma,$$

$\overline{A}$ étant la résiduelle de A, etc.

On a

$$A \equiv \overline{A}, \qquad B \equiv \overline{B},$$

donc

$$C \equiv \overline{A}\,\overline{B} = \sum_{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta \Phi_\alpha \Psi_\beta.$$

Les deux formes C et $A\overline{B}$ étant, par hypothèse, équivalentes ont même résiduelle et

$$\overline{C} = \sum_{\gamma} c_\gamma \Theta_\gamma = \sum_{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta \overline{\Phi_\alpha \Psi_\beta} \qquad (38^\circ).$$

L'expression (numériquement parfaitement *connue* avec les quatre entiers m, n, m', n') $\overline{\Phi_\alpha \Psi_\beta}$ est une résiduelle $\mathfrak{R}_{m+n, m'+n'}$, d'ordre $m+n$ et de classe $m'+n'$. Donc

$$\overline{\Phi_a \Psi_\beta} = \sum_{\gamma} r_{\alpha\beta\gamma} \Theta_\gamma,$$

où les $r_{\alpha\beta\gamma}$ sont des nombres rationnels, parfaitement connus, dès qu'on possède m, n, m' et n'.

On doit donc avoir

$$0 = \sum_{\gamma} \Theta_\gamma \left\{ c_\gamma - \sum_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta \right\},$$

et comme les Θ_γ sont linéairement indépendants (37°)

$$(0) \qquad c_\gamma = \sum_{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta r_{\alpha\beta\gamma}.$$

Telles sont les relations qui lient les invariants d'un produit aux invariants des facteurs.

58° Introduisons des variables x_α, y_β, z_γ et considérons le système

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} z_\gamma &= \sum_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta r_{\alpha\beta\gamma} = \sum_\alpha x_\alpha X_{\alpha\gamma}(y) = \sum_\beta y_\beta Y_{\beta\gamma}(x), \\ X_{\alpha\gamma}(y) &= \sum_\beta y_\beta r_{\alpha\beta\gamma}; \qquad Y_{\beta\gamma}(x) = \sum_\alpha x_\alpha r_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}\right.$$

Envisageons enfin :

Le tableau $\mathcal{X} = \| X_{\alpha\gamma} \|$ aux $\mathfrak{M}(m+n, m'+n')$ colonnes, désignées par le second indice γ, et aux $\mathfrak{M}(m, m')$ lignes désignées par le premier indice α;

Le tableau $\mathcal{Y} = \| Y_{\beta\gamma} \|$ aux $\mathfrak{M}(m+n, m'+n')$ colonnes et aux lignes, au nombre de $\mathfrak{M}(n, n')$, désignées par le premier indice β.

Soient $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ respectivement le nombre des combinaisons de $\mathfrak{M}(m+n, m'+n')$ objets pris $\mathfrak{M}(m, m')$ à $\mathfrak{M}(m, m')$, ou pris $\mathfrak{M}(n, n')$ à $\mathfrak{M}(n, n')$.

$\mathcal{X}$ fournira $\mathbf{M}$ déterminants $\Xi(y)$, formes homogènes et de dimension $\mathfrak{M}(m, m')$ en y_β. $\mathcal{Y}$ fournira de même $\mathbf{N}$ déterminants, formes homogènes de degré $\mathfrak{M}(n, n')$ en x_α, que l'on nommera $H(x)$.

59° Lemme. — *Les expressions $\Xi(y)$ n'ont aucun zéro commun, sauf, bien entendu, $y_\beta = 0$.*

Soit, en effet, $y = b$, c'est-à-dire $y_\beta = b_\beta$ un zéro commun. Le système

$$0 = \sum_\alpha x_\alpha X_{\alpha\gamma}(b)$$

possède au moins une solution $x_\alpha = a_\alpha$ où les a_α ne sont pas tous nuls. Nommons A et B les formes mixtes qui admettent les a_α et les b_β pour invariants. La forme mixte AB(mod ω) aurait ses invariants donnés par la formule (57°, *in fine*)

$$c_\gamma = \sum_\alpha a_\alpha X_{\alpha\gamma}(b) \qquad \text{et} \qquad c_\gamma = 0.$$

On aurait donc deux formes mixtes A et B dont aucune ne serait $\equiv 0 \pmod{\omega}$, tandis que l'on aurait $AB \equiv 0$, ce qui est absurde (26°).

De même, les $\mathfrak{A}$ expressions $H(x)$ n'ont aucun zéro commun, sauf, bien entendu, $x_\alpha = 0$.

Il résulte de là que le système

$$c_\gamma = \sum_\beta y_\beta Y_{\beta\gamma}(a)$$

peut être impossible, mais ne sera jamais indéterminé pour aucun choix des données c_γ et a_α.

C'était à prévoir, car si C est divisible $\pmod{\omega}$ par A, le quotient B est unique et bien déterminé.

60° L'élimination des y_β entre les équations

$$z_\gamma = \sum_\beta y_\beta Y_{\beta\gamma}(x)$$

fournit un système Z de r relations du type

$$(Z) \qquad Z_\rho(z;x) = \sum_\gamma z_\gamma P_{\rho\gamma} = 0 \qquad \{\rho = 1, 2, \ldots, r\},$$

où les P sont des expressions $H(x)$.

On remarquera que tous les zéros communs aux r expressions $Z_\rho(c;x)$ sont mobiles, pour c donné, avec c. Autrement, pour un pareil zéro commun, $x = a$, on aurait $Z_\rho(z;a) = 0$ pour z quelconque. Les $H(a)$ seraient tous nuls, ce qui est absurde (59°).

61° On est maintenant à même de chercher si une forme mixte donnée C, ayant $m + n$ pour ordre et $m' + n'$ pour classe, admet pour diviseur $\pmod{\omega}$ une forme mixte A d'ordre m et de classe m' donnés.

Nommons c_γ les invariants de C et x_α les invariants inconnus du facteur inconnu A.

On posera immédiatement (60°) le système Z

$$Z_\rho(c; x) = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r).$$

Z peut n'avoir aucune solution. Alors C ne possède aucun diviseur (mod ω) ayant m pour ordre et m' pour classe. Z peut posséder un nombre fini de solutions $x = a$, $x = a'$, ... distinctes ou confondues. Chacune fournira sans ambiguïté un diviseur (mod ω) de C. En effet (59°), le système

$$c_\gamma = \sum_\gamma y_\beta Y_{\beta\gamma}(a)$$

cessera d'être impossible, sans jamais pouvoir devenir indéterminé.

62° Je dis que le système Z ne peut admettre, pour $z_\gamma = c_\gamma$, une infinité de solutions. Si, en effet, il en était ainsi, on satisferait au système Z en posant $x_\alpha = a_\alpha(t_1, t_2, \ldots)$; les paramètres t restant arbitraires; a_α désignera, d'ailleurs, une fonction algébrique des t.

Nommons A_t la forme, d'ordre m et de classe m', qui a pour invariants les expressions $a_\alpha(t_1, t_2, \ldots)$ mobiles avec les t. On a

$$C \equiv u_1^h P$$

et, pour un certain choix des t,

$$A_t = u_1^{g_t} Q_t,$$

les formes P et Q_t n'admettant plus u_1 pour diviseur (mod ω). p et q_t étant des formes du type $F^{(1)}$, c'est-à-dire sans x_1, on posera (*voir* Chapitre précédent),

$$p \equiv u_1^\varpi P, \qquad q_t \equiv u_1^{\chi_t} Q_t,$$

où ϖ est la catégorie commune à P et p; χ_t est la catégorie commune à Q_t et q_t.

Par hypothèse A_t est diviseur (mod ω) de C; Q_t de même

divise P et (théorème du 52°) q_t divise p. Cela subsiste quand les t varient dans de certains intervalles. Or p, polynome aux $2N-1$ variables indépendantes $x_2, x_3, \ldots, u_1, u_2, \ldots$, à coefficients donnés, n'admet pas de diviseur mobile avec les t. Donc $q_t = q$ ne dépend pas des t. Alors (théorème du 51°) χ_t, Q_t, g_t sont connus sans ambiguïté et ne dépendent pas des t, ce qui est contre l'hypothèse.

La proposition est démontrée.

63° En résumé, *toute forme mixte admet un nombre fini, qui peut être zéro, de diviseurs* (mod ω), *qui aient une classe donnée et un ordre donné.*

La méthode qui vient d'être exposée permet effectivement, et après un nombre fini et limité d'opérations algébriques, de trouver tous les diviseurs (mod ω) d'une forme mixte F, de trouver les diviseurs de ces diviseurs et ainsi de suite. On dressera la liste de tous les diviseurs ou facteurs irréductibles (mod ω) de F. On sait, d'ailleurs (le domaine Ω des F étant complet), que tout facteur irréductible est aussi premier (mod ω). Le même raisonnement qu'en arithmétique élémentaire permettra d'écrire, *sans ambiguïté*,

$$F \equiv \prod_i \left\{ A_i \begin{pmatrix} m_i & m'_i \\ x; & u \end{pmatrix} \right\}^{\sigma_i} \qquad (\text{mod}\,\omega),$$

$$\sum_i m_i \sigma_i = \text{ordre de F}, \qquad \sum_i m'_i \sigma_i = \text{classe de F},$$

où les A_i sont les différents facteurs premiers (non équivalents) qui divisent (mod ω) la forme F, chacun de ces facteurs n'étant défini qu'à l'équivalence près. Il sera loisible de remplacer chaque A_i par sa résiduelle, laquelle est bien déterminée.

Le plus grand commun diviseur (mod ω) de diverses formes, leur plus petit commun multiple (mod ω) s'obtiendront par des procédés calqués sur ceux de l'arithmétique élémentaire.

64° En résumé, le domaine Ω des formes mixtes est non seulement complet, mais encore *bien défini* (9° et 18°).

Dorénavant, j'appliquerai aux formes mixtes les règles ordinaires du calcul algébrique. J'indiquerai les congruences $(\bmod \omega)$ par le symbole habituel $=$ de l'égalité. Sauf avis contraire,

$$A = B \quad \text{voudra dire} \quad A \equiv B \pmod{\omega}.$$

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS.

65° Soit

$$\mathcal{A} = \left\| a_{ij} \begin{pmatrix} \lambda_i + \mu_j & \lambda'_i + \mu'_j \\ x; & u \end{pmatrix} \right\| \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m, \\ j = 1, 2, \ldots, n, \end{matrix}$$

un tableau à m lignes et à n colonnes, où les éléments a_{ij} sont des formes mixtes. L'ordre (ou la classe) de a_{ij} est la somme de deux entiers dont chacun ne dépend que d'un seul des deux indices i et j.

Considérons r indices i, rangés en ordre croissant

$$\{ i_1, i_2, \ldots, i_r \}. \tag{1}$$

Les r lignes correspondantes formeront une *zone* de *largeur* r. De même r indices j, rangés en ordre croissant

$$\{ j_1, j_2, \ldots, j_r \}, \tag{2}$$

détermineront une *bande* de *largeur* r. Il y aura

$$\varphi(m, r) = \frac{m!}{r!(m-r)!} \text{ zones} \qquad \text{et} \qquad \varphi(n, r) \text{ bandes}.$$

On numérotera les zones par un indice α, variant de 1 à $\varphi(m, r)$, et les bandes par un indice β, variant de 1 à $\varphi(n, r)$.

L'intersection de la zone α avec la bande β définit un déterminant r-aire, $A_{\alpha\beta}$, mineur du tableau $\mathcal{A}$. Les $A_{\alpha\beta}$ sont les éléments d'un tableau à $\varphi(m, r)$ lignes et $\varphi(n, r)$ colonnes,

$$\mathfrak{A} = \| A_{\alpha\beta} \|.$$

$A_{\alpha\beta}$ a respectivement pour ordre et pour classe les expres-

sions

$$\Lambda_\alpha + \mathrm{M}_\beta, \qquad \Lambda'_\alpha + \mathrm{M}'_\beta,$$

$$\Lambda_\alpha = \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_r}, \qquad \mathrm{M}_\beta = \mu_{j_1} + \ldots + \mu_{j_r},$$

$$\Lambda'_\alpha = \lambda'_{i_1} + \ldots, \qquad \mathrm{M}'_\beta = \mu'_{j_1} + \ldots + \mu'_{j_r}.$$

Ainsi, tant pour a_{ij} que pour $\mathrm{A}_{\alpha\beta}$, l'ordre (ou la classe) est la somme de deux entiers dont chacun ne dépend que d'un seul des deux indices i ou j, α ou β.

66° Admettons que le rang du tableau $\mathfrak{A}$ soit r, autrement dit que les déterminants $(r+1)$-aires soient tous nuls, un au moins des déterminants r-aires étant $\neq 0$. La zone (bande) d'indice α (ou β) sera *active* si elle contient au moins un déterminant r-aire, différent de zéro. La zone ou la bande sera *inactive* dans le cas contraire.

D'après un théorème bien connu (Frobenius, *J. f. r. u. a. M.*, t. 82, p. 240) : *Le rang du tableau* $\mathfrak{A}$ *sera un.* Autrement dit : *dans une même zone* (*ou bande*), *le rapport de deux déterminants d'indice* β *et* β' (*ou* α *et* α') *est le même quelle que soit la zone* (*ou bande*) *considérée.* Ce rapport ne dépend que de β et β' (ou α et α').

67° En vertu de ce qui vient d'être dit, on pourra écrire successivement

$$\frac{\mathrm{A}_{\alpha\beta}}{\mathrm{A}_{\alpha\beta'}} = \frac{\mathrm{A}_{\alpha_0\beta}}{\mathrm{A}_{\alpha_0\beta'}}, \qquad \frac{\mathrm{A}_{\alpha\beta'}}{\mathrm{A}_{\alpha'\beta'}} = \frac{\mathrm{A}_{\alpha\beta'_0}}{\mathrm{A}_{\alpha'\beta'_0}}$$

et, par multiplication,

$$\frac{\mathrm{A}_{\alpha\beta}}{\mathrm{A}_{\alpha'\beta'}} = \frac{\mathrm{A}_{\alpha_0\beta}\mathrm{A}_{\alpha\beta'_0}}{\mathrm{A}_{\alpha_0\beta'}\mathrm{A}_{\alpha'\beta'_0}};$$

d'où

$$\mathrm{A}_{\alpha\beta} = \mathrm{A}_{\alpha\beta'_0}\frac{\mathrm{A}_{\alpha'\beta'}}{\mathrm{A}_{\alpha_0\beta'}\mathrm{A}_{\alpha'\beta'_0}}\mathrm{A}_{\alpha_0\beta}.$$

Fixons, une fois pour toutes, les indices α_0, α', β', β'_0. On pourra écrire

$$\mathrm{A}_{\alpha\beta} = \mathrm{P}_\alpha \mathrm{Q}_\beta$$

et dire que $\mathrm{A}_{\alpha\beta}$ est le produit de deux facteurs dont chacun ne dépend que d'un seul des deux indices α et β.

P_α et Q_β sont des quotients de forme mixtes. Je dis plus, et que P_α et Q_β *sont des formes mixtes*.

68° Réduisons, en effet, les P_α au même dénominateur, et mettons en évidence le p. g. c. d. des numérateurs. On écrira

$$P_\alpha = \frac{p p_\alpha}{p_0},$$

où les p_α sont des formes mixtes premières entre elles, où p et p_0 sont deux formes mixtes premières entre elles.

De même

$$Q_\beta = \frac{q q_\beta}{q_0}$$

et enfin, K_α et L_β désignant des constantes arbitraires

$$(o) \qquad p_0 q_0 \sum_{\alpha\beta} K_\alpha L_\beta A_{\alpha\beta} = pq\left(\sum_\alpha K_\alpha p_\alpha\right)\left(\sum_\beta L_\beta q_\beta\right) = pq\left(\sum K p\right)\left(\sum L q\right).$$

Les facteurs premiers de $\sum Kp$ ou $\sum Lq$ changent tous avec le choix des constantes K ou L. En effet, si le facteur premier ϖ divise

$$\mathfrak{K} = \sum Kp,$$

quels que soient les K, ϖ divise aussi $\mathfrak{K}$ quand tous les K, sauf un, sont nuls. ϖ diviserait chacun des p_α, ce qui est absurde.

p_0 divise le second membre de l'égalité (o), sans pouvoir avoir aucun facteur premier commun ni avec p, ni avec

$$\sum Kp,$$

ni avec $\sum Lq$. Donc p_0 divise q, $q = q' p_0$. De même $p = p' q_0$

$$A_{\alpha\beta} = \frac{p' q' p_\alpha q_\beta p_0 q_0}{p_0 q_0} = p' p_\alpha . q' q_\beta.$$

C'est ce qui était à démontrer, car on peut écrire

$$P_\alpha = p' p_\alpha, \qquad Q_\beta = q' q_\beta.$$

69° En résumé, *dans un tableau* $\mathcal{A}$ *de rang r, les*

$$\varphi(m, r)\varphi(n, r)$$

déterminants r-aires $A_{\alpha\beta}$ *sont chacun le produit* $P_\alpha Q_\beta$ *de deux formes mixtes dont chacune ne dépend que d'un seul des deux indices* α *et* β.

Cette proposition nous sera très souvent utile.

70° Considérons les m équations

$$\sum_j a_{ij}\xi_j = 0, \tag{0}$$

aux n inconnues ξ_j. Il n'est ni plus, ni moins général de prendre les r équations distinctes que l'on obtient en considérant une zone active quelconque d'indice α, par exemple.

Complétons une matrice n-aire en écrivant au-dessous de la zone active de r lignes, $n-r$ lignes composées de quantités quelconques

$$b_{\rho j}, \quad \rho = 1, 2, \ldots, n-r,$$

mais choisies, une fois pour toutes, de façon que le déterminant G de la matrice soit différent de zéro. Cela est toujours possible puisque la zone est active.

Frobenius (*l. c.*, p. 237) démontre que les valeurs les plus générales des ξ_j sont données par la formule

$$\xi_j = \sum_\rho K_\rho \frac{\partial G}{\partial b_{\rho j}}, \qquad K_\rho = \text{const. arbitr.} \tag{1)'$$

Autrement dit, toute solution de (0) s'obtient en attribuant aux constantes K_ρ des valeurs convenables.

P_α et Q_β ayant les significations expliquées ci-dessus, on a évidemment

$$G = P_\alpha \sum_\beta Q_\beta G_\beta(b),$$

où les $G_\beta(b)$ sont des polynomes homogènes en $b_{\rho j}$, c'est-à-dire les déterminants $(n-r)$-aires du tableau $\|b_{\rho j}\|$.

On peut donc écrire la formule (1)′ ainsi

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_j &= \sum_{\rho\beta} K_\rho Q_\beta \frac{\partial G_\beta}{\partial b_{\rho j}} \\ &= \sum_\beta Q_\beta \sum_\rho K_\rho \frac{\partial G_\beta}{\partial b_{\rho j}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rho = 1, 2, \ldots, n-r, \\ &j = 1, 2, \ldots, n, \\ &\beta = 1, 2, \ldots, \varphi(n, r). \end{aligned}$$

71° Examinons pareillement le système de n équations, à m inconnues

$$\sum_i \zeta_i a_{ij} = 0.$$

On prendra encore, dans la table $\mathcal{A} = \|a_{ij}\|$ une bande active de r colonnes. On complétera une matrice m-aire en ajoutant $m-r$ colonnes, dont les éléments $c_{i\sigma}$, $\sigma = 1, 2, \ldots, m-r$ auront été choisis de façon que le déterminant H de la matrice m-aire soit $\neq 0$. Nommons β l'indice de la bande active. Il viendra

$$H = Q_\beta \sum_\alpha P_\alpha H_\alpha(c),$$

les $H_\alpha(c)$ sont les déterminants $(m-r)$-aires du tableau

$$\|c_{i\sigma}\|;$$

ce sont des polynomes homogènes par rapport aux $c_{i\sigma}$ avec le degré $m-r$ d'homogénéité.

L'expression la plus générale des ζ_i sera encore

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \zeta_i &= \sum_{\sigma\alpha} L_\sigma P_\alpha \frac{\partial H_\alpha(c)}{\partial c_{i\sigma}} \\ &= \sum_\alpha P_\alpha \sum_\sigma L_\sigma \frac{\partial H_\alpha(c)}{\partial c_{i\sigma}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &L_\sigma = \text{const. arbitr.}, \\ &\sigma = 1, 2, \ldots, m-r, \\ &\alpha = 1, 2, \ldots, \varphi(m, r), \end{aligned}$$

72° On considérera aussi les équations

$$z_i = \sum_j a_{ij} t_j,$$

où les t_j sont des variables indépendantes. Il viendra, d'après

ce qui vient d'être expliqué,

$$0 = \sum_i \zeta_i z_i = \sum_j t_j \sum_i a_{ij} \zeta_i$$
$$= \sum_{i\sigma\alpha} z_i \mathrm{L}_\sigma \mathrm{P}_\alpha \frac{\partial \mathrm{H}_\alpha(c)}{\partial c_{i\sigma}} = \sum_\sigma \mathrm{L}_\sigma \sum_{i\alpha} z_i \mathrm{P}_\alpha \frac{\partial \mathrm{H}_\alpha(c)}{\partial c_{i\sigma}}.$$

Les L_σ sont des paramètres arbitraires. Des théories bien connues apprennent qu'il existe, entre les z_i, $m - r$ relations distinctes, linéaires et homogènes. Donc ces $m - r$ relations sont

$$(1) \qquad \sum_i z_i \sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha \frac{\partial \mathrm{H}_\alpha(c)}{\partial c_{i\sigma}},$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots, m - r.$$

73° Dans le tableau $\mathcal{A}$ du 65°, de rang r, prenons un déterminant r-aire $\delta \neq 0$. On peut toujours faire

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ \vdots \\ a_{r1} \ldots a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Pour que $\mathcal{A}$ ait le rang r, il faut et il suffit qu'on ait (Frobenius, *J. f. r. u. a. M.*, t. 82, p. 239),

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \, a_{1\nu} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{r1} \ldots a_{rr} \, a_{r\nu} \\ a_{\mu 1} \ldots a_{\mu r} \, a_{\mu\nu} \end{vmatrix} = \Delta_{\mu\nu} \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toutes les combinaisons} \\ \text{d'indices } \mu \text{ et } \nu, \text{ tels que} \\ r < \mu \leqq m; \qquad r < \nu \leqq n. \end{array} \right.$$

D'ailleurs si μ ou ν était $\leqq r$, le déterminant $(r + 1)$-aire correspondant Δ s'évanouirait identiquement.

Bref on a

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{r1} \, a_{1j} \\ \vdots \qquad \vdots \;\; \vdots \\ a_{r1} \ldots a_{rr} \, a_{rj} \\ a_{i1} \ldots a_{ir} \, a_{ij} \end{vmatrix} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right\}.$$

Développons Δ_{ij} par rapport aux éléments de la $(r + 1)$-ième

et dernière colonne. Il viendra

$$\delta a_{ij} + \sum_s a_{sj} \frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial a_{sj}} = 0, \qquad \{s = 1, 2, \ldots, r\}.$$

Les $\frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial a_{sj}}$ ne dépendent pas de l'indice j et l'on a la formule définitive

$$(0) \qquad Q a_{ij} = \sum_s E_{is} D_{js},$$

où Q, E_{is}, D_{js} *sont des formes mixtes.*

74° Posons

$$\left\{ \begin{matrix} \overline{E} = [E_{is}], \qquad \overline{D} = [D_{js}] \\ i = 1, 2, \ldots, m; \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad s = 1, 2, \ldots, r \end{matrix} \right\}.$$

Je dis que *le tableau $\overline{E}$ à m lignes et r colonnes, ainsi que le tableau $\overline{D}$ à n lignes et r colonnes sont tous les deux corrects.*

Soit, en effet, A un déterminant r-aire de $\mathcal{A}$ obtenu (65°) en prenant les lignes $i_1, i_2, \ldots, i_r$ et les colonnes $j_1, j_2, \ldots, j_r$. On verra sans peine que, en vertu de la formule (0) du 73°,

$$(1) \qquad \pm Q^r A = \mathcal{E} \mathcal{D},$$

où $\mathcal{E}$ est le déterminant r-aire de $\overline{E}$ obtenu en prenant les lignes $i_1, \ldots, i_r$, et $\mathcal{D}$ est le déterminant r-aire de $\overline{D}$ obtenu en prenant les lignes $j_1, \ldots, j_r$.

Si tous les $\mathcal{E}$ étaient nuls, ou tous les $\mathcal{D}$ étaient nuls, les A seraient également tous nuls; le rang de $\mathcal{A}$ serait inférieur à r. Cela établit la correction des tableaux $\overline{E}$ et $\overline{D}$.

D'après le théorème du 69°, on doit avoir, dans la formule (1) ci-dessus,

$$Q^r = \mathcal{E}_0 \mathcal{D}_0, \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e, \qquad \mathcal{D} = \mathcal{D}_0 d,$$

$\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{D}_0$ étant les mêmes pour tous les $\mathcal{E}$ ou pour tous les $\mathcal{D}$.

Les formules du présent Chapitre auront leur emploi dans la Troisième Partie.

TROISIÈME PARTIE.

SUBSTITUTIONS CRÉMONIENNES.

CHAPITRE I.

DÉFINITION DES CRÉMONIENNES.

1° Je me propose d'étendre au cas de N quelconque les résultats démontrés sur le terrain quaternaire, $N = 4$, dans la troisième Partie de mon Mémoire de Bruxelles.

Plusieurs parties de la théorie nouvelle exigeront des discussions nouvelles, que je produirai avec le détail nécessaire. Par contre, sur d'autres points, les cas $N = 4$ et N quelconque se traitent presque textuellement de même. Aussi, pour ces explications, je serai extrêmement bref, renvoyant, aussi souvent que possible, à mon travail antérieur. Un renvoi tel que

(Belge, 17°),

par exemple, désignera le n° 17 de la troisième Partie de mon Mémoire de Bruxelles (VIII de l'Index bibliographique).

2° Prenons 4N formes mixtes $\{i = 1, 2, \ldots, N\}$

$$\varphi_i\begin{pmatrix} m & m' \\ z\,; & w \end{pmatrix}, \qquad \psi_i\begin{pmatrix} n & n' \\ z\,; & w \end{pmatrix},$$

$$\theta_i\begin{pmatrix} p & p' \\ z\,; & w \end{pmatrix}, \qquad \tau_i\begin{pmatrix} q & q' \\ z\,; & w \end{pmatrix},$$

où les ordres m, n, p, q et les classes m', n', p', q' sont des entiers nuls ou positifs.

Posons, comme toujours,

$$z_0 = \sum e z, \qquad \varphi_0 = \sum e\varphi, \qquad \psi_0 = \sum g\psi,$$

$$w_0 = \sum g w, \qquad \theta_0 = \sum e\theta, \qquad \eta_0 = \sum g\eta.$$

Supposons enfin que, sous le bénéfice de

$$\omega(z, w) = \sum z w = 0,$$

on ait

$$\frac{\varphi_i(\theta;\eta)}{\varphi_0(\theta;\eta)} = \frac{z_i}{z_0}, \qquad \frac{\psi_i(\theta;\eta)}{\psi_0(\theta;\eta)} = \frac{w_i}{w_0},$$

$$\frac{\theta_i(\varphi;\psi)}{\theta_0(\varphi;\psi)} = \frac{z_i}{z_0}; \qquad \frac{\eta_i(\varphi;\psi)}{\eta_0(\varphi;\psi)} = \frac{w_i}{w_0},$$

$$\sum \varphi\psi = 0, \qquad \sum \theta\eta = 0.$$

Seront alors définies sans ambiguïté une substitution birationnelle s

$$s = \begin{vmatrix} z_i & \varphi_i(z;w) \\ w_i & \psi_i(z;w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & \varphi(z;w) \\ w & \psi(z;w) \end{vmatrix}$$

et son inverse

$$s^{-1} = \begin{vmatrix} z_i & \theta_i(z;w) \\ w_i & \eta_i(z;w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & \theta(z;w) \\ w & \eta(z;w) \end{vmatrix}.$$

On aura identiquement

$$\sum \varphi\psi = P\,\omega, \qquad \sum \theta\eta = Q\,\omega;$$

autrement dit *l'expression* ω *sera un* invariant *vis-à-vis de* s *et* s^{-1}.

Pour mettre en évidence les ordres m, n, p, q et les classes m', n', p', q', on écrira aussi

$$s = \begin{pmatrix} m & m' & \big| & p & p' \\ n & n' & \big| & q & q' \end{pmatrix}, \qquad s^{-1} = \begin{pmatrix} p & p' & \big| & m & m' \\ q & q' & \big| & n & n' \end{pmatrix}.$$

3° Posons

$$y_i \varphi_0(x;\, u) = \varphi_i(x;\, u); \qquad v_i \psi_0(x;\, u) = \psi_i(x;\, u);$$
$$x_i \theta_0(y;\, v) = \theta_i(y;\, v); \qquad u_i \eta_0(y;\, v) = \eta_i(y;\, v).$$

Chacune des égalités

$$\sum ux = 0, \qquad \sum vy = 0$$

sera une conséquence de l'autre, et l'on peut parler des *éléments* (x, u) et (y, v). On écrira

$$(y, v) = s[(x, u)], \qquad (x, u) = s^{-1}[(y, v)],$$

et l'on dira que l'élément

(y, v) est l'*image par* s de l'élément (x, u),
(x, u) » s^{-1} » (y, v).

4° Admettons enfin que, vis-à-vis de la substitution s, ou s^{-1}, l'expression

$$\sum w\, dz = -\sum z\, dw$$

soit un *invariant*. Nous étudierons plus loin (26°) les conditions algébriques de cette propriété. Alors s et s^{-1} conservent la *situation réunie* des éléments infiniment voisins. s et s^{-1} sont des substitutions *birationnelles de contact*, et prendront, par définition, le nom de *substitutions crémoniennes* [1] (Belge, 5°).

5° Soient deux crémoniennes

$$s = \begin{vmatrix} z & \varphi(z;\, w) \\ w & \psi(z;\, w) \end{vmatrix}, \qquad s' = \begin{vmatrix} z & \varphi'(z;\, w) \\ w & \psi'(z;\, w) \end{vmatrix}.$$

Le produit $s's$ sera, *par définition*, la substitution

$$s's = \begin{vmatrix} z & \varphi'(\varphi;\, \psi) \\ w & \psi'(\varphi;\, \psi) \end{vmatrix}.$$

---

[1] Ne pas confondre avec la substitution Cremona qui, dans ma terminologie, est une substitution birationnelle ponctuelle.

s's est aussi une crémonienne et *les crémoniennes forment un groupe, le* groupe crémonien (pour la démonstration : Belge, 6°).

6° Soit une matrice N-aire

$$A = [a_{ij}], \qquad |A| = 1 \qquad \{i, j = 1, 2, \ldots, N\}.$$

On vérifie immédiatement que la substitution

$$\begin{vmatrix} z & A[z] \\ w & A'^{-1}[z] \end{vmatrix}$$

est une crémonienne

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right),$$

avec

$$\begin{vmatrix} z & A^{-1}[z] \\ w & A'[w] \end{vmatrix}$$

pour inverse (Belge, 7°). C'est le *changement de coordonnées* le plus général.

Pareillement, la *substitution d'échange* (Belge, 8°)

$$\varepsilon = \varepsilon^{-1} = \begin{vmatrix} z & w \\ w & z \end{vmatrix}$$

est une crémonienne

$$\left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right).$$

C'est la *transformation par polaires réciproques*, la quadrique de base étant $\sum z^2 = 0$.

7° Nous prendrons dorénavant pour coordonnées courantes, non plus z et w, mais x et u, et nous écrirons, comme algorithme des crémoniennes,

$$s = \begin{vmatrix} x & \varphi(x;u) \\ u & \psi(x;u) \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix} m & m' \\ n & n' \end{matrix}\middle|\begin{matrix} p & p' \\ q & q' \end{matrix}\right),$$

$$s^{-1} = \begin{vmatrix} x & \theta(x;u) \\ u & \eta(x;u) \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix} p & p' \\ q & q' \end{matrix}\middle|\begin{matrix} m & m' \\ n & n' \end{matrix}\right),$$

avec

$$\varphi_i\begin{pmatrix} m & m' \\ x; & u \end{pmatrix}, \qquad \psi_i\begin{pmatrix} n & n' \\ x; & u \end{pmatrix},$$

$$\theta_i\begin{pmatrix} p & p' \\ x; & u \end{pmatrix}, \qquad \eta_i\begin{pmatrix} q & q' \\ x; & u \end{pmatrix}.$$

8° Il importe de préciser maintenant la notion de *birationnalité* ou l'*inversion* d'une crémonienne (Belge, 9°).

Considérons les équations Ω

$$y_0 = 1, \qquad v_0 = 1, \qquad \sum yv = 0,$$

$$\frac{\theta_1(y;\, v)}{x_1} = \ldots = \frac{\theta_N(y;\, v)}{x_N}; \qquad \frac{\eta_1(y;\, v)}{u_1} = \ldots = \frac{\eta_N(y;\, v)}{u_N}$$

au nombre de $2N+1$, entre les $2N$ inconnues y_i et v_i, l'élément (x, u) étant momentanément fixé.

Le système Ω est compatible, puisqu'il existe déjà au moins la solution

$$(0) \qquad \begin{cases} y_i = \varphi_i(x;\, u) : \varphi_0(x;\, u), \\ v_i = \psi_i(x;\, u) : \psi_0(x;\, u). \end{cases}$$

Le résultant du système Ω, qui est une forme mixte en x_i et u_i, doit être divisible par ω, et nul sous le bénéfice de $\omega = 0$.

Un élément (y, v) dont les coordonnées satisfont au système Ω sera une *solution propre* si (y, v) dépend *à la fois* du point x et du plan u, et si (y, v) parcourt l'espace tout entier quand (x, u) parcourt cet espace.

Toute solution (y, v) qui ne répond pas aux conditions précédentes est *impropre*. Il y a plusieurs façons d'être pour une solution impropre.

(y, v) peut ne dépendre que de x et rester fixe quand le plan u tourne autour de x.

(y, v) peut ne dépendre que de u et rester fixe quand x parcourt le plan u.

Enfin (y, v) peut être absolument fixe et avoir pour coordonnées des constantes.

J'admettrai que Ω possède *une et une seule solution propre*. Elle sera forcément rationnelle et coïncidera avec la solution (o). La rationnalité sera une *conséquence* de l'unicité de la solution propre [1].

Si la solution propre et unique est supposée exister toujours, les solutions impropres n'auront qu'une existence éventuelle.

Remonter des formes φ_i et ψ_i (ou θ_i et η_i) aux formes θ_i et η_i (ou φ_i et ψ_i), c'est *faire l'inversion* de la substitution s (ou s^{-1}). D'après ce qui précède, *l'inversion sera une opération univoque.*

Il est donc indifférent de construire soit s, soit s^{-1}, puisque chacune d'elles fournit l'autre sans ambiguïté.

9° On ne considérera pas comme distinctes les crémoniennes

$$s \quad \text{et} \quad asb,$$

où a et b sont ou des collinéations (crémoniennes du type du 6°) ou des substitutions d'échange (6°). Cela revient, en effet, à introduire dans l'espace des changements de coordonnées ou la dualité.

Soit (Belge, 13°)

$$s = \left(\begin{matrix} m & m' \\ n & n' \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} p & p' \\ q & q' \end{matrix}\right), \qquad s^{-1} = \left(\begin{matrix} p & p' \\ q & q' \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} m & m' \\ n & n' \end{matrix}\right),$$

$$s\varepsilon = \left(\begin{matrix} m' & m \\ n' & n \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} q & q' \\ p & p' \end{matrix}\right),$$

car

$$(s\varepsilon)^{-1} = \varepsilon s^{-1}.$$

---

(1) Il est à peine besoin de rappeler qu'un système d'équations algébriques peut posséder une solution rationnelle, sans que cette solution soit unique. Par exemple, dans le cas le plus simple, prenons les deux équations $A = B = 0$

$$A = x^\alpha + a_1 x^{\alpha-1} + \ldots + a_\alpha, \qquad B = x^\beta + \ldots + b_\beta.$$

S'il y a *une* racine commune, elle est rationnelle. Mais, si le p. g. c. d. des deux polynomes A et B est $(x-c)^\gamma$, la solution deviendra γ-uple, sans cesser d'être rationnelle.

Construire s^{-1} et $s\varepsilon$, au lieu de s, c'est donc effectuer, sur les huit entiers

$$m,\quad m',\quad n,\quad n',\quad p,\quad p',\quad q,\quad q',$$

les permutations ou substitutions suivantes :

$$\alpha = (mp)(m'p')(nq)(n'q'), \qquad \alpha^2 = 1,$$
$$\beta = (mm')(nn')(pq)(p'q'), \qquad \beta^2 = 1.$$

Nommons Γ le groupe entre huit lettres dérivé de α et β. On a

$$\gamma = \alpha\beta = (mqn'p')(pm'q'n), \qquad \gamma^4 = 1;$$
$$\alpha^{-1}\gamma\alpha = \beta^{-1}\gamma\beta = \gamma^3 = \beta\alpha, \qquad \beta = \alpha\gamma.$$

Γ contient le sous-groupe Γ_0 constitué par les puissances de γ et permutable à toutes les substitutions de Γ. Ainsi Γ contient les huit substitutions

$$1,\quad \gamma,\quad \gamma^2,\quad \gamma^3,$$
$$\alpha,\quad \alpha\gamma,\quad \alpha\gamma^2,\quad \alpha\gamma^3;$$

$$\gamma = (mq\ldots)\ldots,\quad \gamma^2 = (mn')\ldots,\quad \gamma^3 = (mp'\ldots)\ldots,\quad \alpha = (mp)\ldots,$$
$$\alpha\gamma = (mm')\ldots,\quad \alpha\gamma^2 = (mq')\ldots,\quad \alpha\gamma^3 = (mn)\ldots.$$

Donc, *si l'on a à faire une hypothèse sur un des huit entiers m, ..., q', il est indifférent de la faire sur n'importe lequel des huit entiers.*

C'est une facilité dont j'userai constamment dans la suite.

10° On peut définir les éléments (x, u) et (y, v) par leurs coordonnées non homogènes (Généralités, 7°) λ_α et μ_β respectivement $\{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2N-3\}$. Une crémonienne s se traduit par les relations

$$\mu_\beta = \mathcal{L}_\beta(\lambda),$$
$$\lambda_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha(\mu),$$

où $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont des fonctions rationnelles.

Les matrices $(2N-3)$ — aires

$$[l_{\beta\alpha}], \quad [m_{\alpha\beta}],$$

$$l_{\beta\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_\beta}{\partial \lambda_\alpha}, \qquad m_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathfrak{M}_\alpha}{\partial \mu_\beta}$$

ont leurs déterminants $\neq 0$.

En effet, le déterminant de $[l_{\beta\alpha}]$ est le jacobien

$$J = \frac{\partial(\mu_1, \mu_2, \ldots)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)}.$$

Si J est zéro, les μ sont liées par une relation au moins. Alors, quand l'élément (x, u) parcourt tout l'espace, l'élément (y, v) ne parcourt pas tout l'espace, ce qui est absurde.

De même pour le déterminant de la matrice $[m_{\alpha\beta}]$.

11° On supposera, bien entendu, toujours les N formes mixtes

$$\varphi_i, \quad \psi_i, \quad \theta_i \quad \text{ou} \quad \eta_i,$$

premières entre elles $(\bmod \omega)$. Sinon, on supprimerait le facteur commun, qui disparaît dans les quotients

$$\varphi_i : \varphi_0, \quad \psi_i : \psi_0, \quad \theta_i : \theta_0, \quad \eta_i : \eta_0,$$

ce qui réduirait les entiers $m, \ldots, q'$.

12° Il est indifférent d'écrire :

$$\begin{array}{lll} \varphi_i & \text{ou} & \varphi_i + \omega\alpha_i\begin{pmatrix} m-1 & m'-1 \\ x, & u \end{pmatrix}, \\ \psi_i & & \psi_i + \omega\beta_i\begin{pmatrix} n-1 & n'-1 \\ x, & u \end{pmatrix}, \\ \theta_i & & \theta_i + \omega\gamma_i\begin{pmatrix} p-1 & p'-1 \\ x, & u \end{pmatrix}, \\ \eta_i & & \eta_i + \omega\delta_i\begin{pmatrix} q-1 & q'-1 \\ x, & u \end{pmatrix}; \end{array}$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i =$ forme mixte quelconque.

Alors les dérivées partielles s'accroissent :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \text{ de } \alpha_i u_j; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \text{ de } \alpha_i x_j; \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \text{ de } \beta_i u_j; \quad \dots$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Toutes les propriétés où interviendront les dérivées partielles devront donc être *permanentes,* c'est-à-dire indépendantes du choix des α_i, β_i, γ_i, δ_i.

13° Pour abréger l'écriture, j'écrirai $\{i, j = 1, 2, \dots, N\}$:

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}, \qquad \varphi'_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j},$$
$$\psi_{ij} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}, \qquad \psi'_{ij} = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j},$$
$$\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots$$

CHAPITRE II.

TABLEAUX CARACTÉRISTIQUES D'UNE CRÉMONIENNE.

14° Avec les diverses dérivées partielles (13°),

$$\varphi_{ij}, \quad \varphi'_{ij}, \quad \ldots, \quad \eta_{ij}, \quad \eta'_{ij}$$

et les quantités

$$x_j = \frac{\partial \omega}{\partial u_j}, \qquad u_j = \frac{\partial \omega}{\partial x_j},$$

on forme plusieurs tableaux qui jouent un grand rôle dans la classification des crémoniennes.

15° Disposons sur une même ligne les $2N$ dérivées partielles d'une des $2N$ expressions φ_i et ψ_i. La dernière et $(2N+1)^{\text{ième}}$ ligne contiendra les dérivées de ω. Il viendra ainsi le tableau à $2N+1$ lignes et à $2N$ colonnes

$$\nabla = \nabla_s = \left\{ \begin{matrix} \varphi_{ij}, & \varphi'_{ij} \\ \psi_{ij}, & \psi'_{ij} \\ u_j, & x_j \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \varphi & \varphi' \\ \psi & \psi' \\ u & x \end{matrix} \right\}.$$

On aura un tableau analogue

$$\nabla_{s-1} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0' \\ \eta & \eta' \\ u & x \end{matrix} \right\}.$$

16° Dans les tableaux ∇ ne conservons que la première ou la seconde moitié des $2N$ colonnes. On aura les tableaux à

$2N+1$ lignes et N colonnes

$$\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \psi\\ u\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}\varphi'\\ \psi'\\ x\end{matrix}\right\},$$

ou bien

$$\left\{\begin{matrix}\theta\\ \eta\\ u\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}\theta'\\ \eta'\\ x\end{matrix}\right\}.$$

On aura aussi les tableaux à $N+1$ lignes et $2N$ colonnes

$$\left\{\begin{matrix}\varphi & \varphi'\\ u & x\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}\psi & \psi'\\ u & x\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}\theta & \theta'\\ u & x\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}\eta & \eta'\\ u & x\end{matrix}\right\}.$$

17° Viendront enfin les tableaux à $N+1$ lignes et N colonnes

$$\left\{\varphi\right\}=\left\{\begin{matrix}\varphi\\ u\end{matrix}\right\},\quad \left\{\varphi'\right\}=\left\{\begin{matrix}\varphi'\\ x\end{matrix}\right\},\quad \left\{\psi\right\}=\left\{\begin{matrix}\psi\\ u\end{matrix}\right\},\quad \left\{\psi'\right\}=\left\{\begin{matrix}\psi'\\ x\end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\theta\right\}=\left\{\begin{matrix}\theta\\ u\end{matrix}\right\},\quad \left\{\theta'\right\}=\left\{\begin{matrix}\theta'\\ x\end{matrix}\right\},\quad \left\{\eta\right\}=\left\{\begin{matrix}\eta\\ u\end{matrix}\right\},\quad \left\{\eta'\right\}=\left\{\begin{matrix}\eta'\\ x\end{matrix}\right\}.$$

18° Je vais étudier le *rang* de ces divers tableaux, ce rang calculé, bien entendu, pour un élément *quelconque* (x, u) de l'espace.

Il faut commencer par établir que le rang d'un pareil tableau est un nombre *permanent* (12°).

Soit un tableau

$$\mathfrak{A}=[a_{\alpha\beta}],\qquad \{\alpha=1,2,\ldots,m;\ \beta=1,2,\ldots,n\},$$

à m lignes et à n colonnes. Soit r le rang de $\mathfrak{A}$. r ne peut dépasser le plus petit des deux entiers m et n. Le tableau sera correct (Préliminaires, 1°) si r a sa valeur maximum, égale au plus petit des deux entiers m et n.

Prenons les systèmes

$$\text{(M)}\qquad \sum_{\beta} a_{\alpha\beta}t_{\beta}=0$$

de m équations à n inconnues t_β, ou bien

$$(N)\qquad \sum_\alpha a_{\alpha\beta} h_\alpha = 0$$

de n équations à m inconnues h_α.

La solution générale du système M (ou N) dépendra, d'une façon linéaire et homogène, de $n-r$ (ou $m-r$) paramètres arbitraires. Elle possédera le degré $n-r$ (ou $m-r$) d'indétermination.

Si donc on possède, d'une façon quelconque, le degré d'indétermination de la solution, soit pour M, soit pour N, le rang r s'obtiendra immédiatement.

19° *Le rang du tableau* ∇ (15°) *est permanent.*

Considérons le système de $2N+1$ équations à $2N$ inconnues ξ_j et υ_j,

$$(Z)\qquad \begin{cases} \sum_j \varphi_{ij}\upsilon_j + \sum_j \varphi'_{ij}\xi_j = 0, \\ \sum_j \psi_{ij}\upsilon_j + \sum_j \psi'_{ij}\xi_j = 0, \\ \sum_j u_j\upsilon_j + \sum_j x_j\xi_j = 0, \end{cases}$$

Changeons maintenant (12°) φ_i et ψ_i en $\varphi_i + \omega\alpha_i$ et $\psi_i + \omega\beta_i$. Le système Z devient (en omettant la dernière équation, qui ne change pas)

$$(Z')\qquad \begin{cases} \sum_j \varphi_{ij}\upsilon_j + \sum_j \varphi'_{ij}\xi_j + \alpha_i\left[\sum_j u_j\upsilon_j + \sum_j x_j\xi_j\right] = 0, \\ \sum_j \psi_{ij}\upsilon_j + \sum_j \psi'_{ij}\xi_j + \beta_i\left[\sum_j u_j\upsilon_j + \sum_j x_j\xi_j\right] = 0. \end{cases}$$

Or Z et Z′ *ne sont pas distincts;* ils possèdent le même degré d'indétermination, ce qui assure (18°) la permanence du rang pour le tableau ∇.

Il en est de même pour le tableau ∇_{s-1}.

20° Théorème. — *Le tableau* ∇ *est correct et possède son rang maximum* 2N.

En effet, si le rang de ∇ est inférieur à 2N, on peut construire au moins un système de 2N nombres υ_j et ξ_j (dont au moins un différent de zéro), tels que les équations Z du 19° soient satisfaites.

Imprimons à l'élément (x, u) un déplacement infinitésimal qui l'amène en

$$(x + \upsilon\, d\tau,\ u + \xi\, d\tau),$$

$d\tau$ étant un infiniment petit quelconque.

Il viendra alors

$$0 = d\varphi_i = \sum_j \varphi_{ij}\, dx_j + \sum_j \varphi'_{ij}\, du_j = d\tau \Big[\sum_j \varphi_{ij} \upsilon_j + \dots \Big],$$

$$0 = d\psi_i = \sum_j \psi_{ij}\, dx_j + \sum_j \psi'_{ij}\, du_j = d\tau \Big[\sum_j \psi_{ij} \upsilon_j + \dots \Big],$$

$$0 = \sum_j u_j\, dx_j + \sum_j x_j\, du_j = d\tau \Big[\sum_j u_j \upsilon_j + \dots \Big],$$

en vertu des relations Z du 19°. Enfin

$$dy_i = \frac{\varphi_0\, d\varphi_i - \varphi_i\, d\varphi_0}{\varphi_0^2} = d\frac{\varphi_i}{\varphi_0} = 0,$$

$$dv_i = \frac{\psi_0\, d\psi_i - \psi_i\, d\psi_0}{\psi_0^2} = d\frac{\psi_i}{\psi_0} = 0.$$

On pourrait donc bouger l'élément (x, u) sans que l'élément image (y, v) bouge. Alors, en coordonnées non homogènes (10°) μ_β et λ_α, on aurait pour un choix convenable des différentielles $d\lambda_\alpha$

$$0 = d\mu_\beta = \sum l_{\beta\alpha}\, d\lambda_\alpha.$$

Cela est absurde (10°), car le jacobien

$$\frac{\partial(\mu_1, \mu_2, \dots)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \dots)}$$

serait zéro, ce qui n'est pas.

Le théorème est ainsi démontré.

21° Au tableau ∇ ajoutons une première colonne, formée de $2N + 1$ constantes *arbitraires* a_i, b_i, K.

En vertu du théorème précédent, le déterminant $(2N+1)$-aire

$$\Theta = \begin{vmatrix} a_i & \varphi_{ij} & \varphi'_{ij} \\ b_i & \psi_{ij} & \varphi'_{ij} \\ K & u_j & x_j \end{vmatrix} \qquad \{ i, j = 1, 2, \ldots, N \}$$

est différent de zéro.

22° THÉORÈME. — *Le rang du tableau*

$$\tau = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \psi \\ u \end{Bmatrix}$$

est permanent et égal à N et le tableau est correct.

Écrivons le système des $2N + 1$ équations

$$\sum_j \varphi_{ij} t_j = \sum_j \psi_{ij} t_j = \sum_j u_j t_j = 0$$

aux N inconnues t_j. La permanence du rang se démontrera comme au 19°.

Cela étant, supposons le rang du tableau τ inférieur à N. Tous les déterminants N-aires de τ sont nuls. Le déterminant Θ du 21° aurait une bande inactive (66°, Deuxième Partie) de N colonnes et serait nul, ce qui est absurde (21°). τ a donc le rang N. C. Q. F. D.

On verra de même que le rang est N pour les tableaux

$$\begin{Bmatrix} \varphi' \\ \psi' \\ x \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \theta \\ \eta \\ u \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \theta' \\ \eta' \\ x \end{Bmatrix}.$$

23° THÉORÈME. — *Le rang du tableau*

$$\tilde{\sigma} = \begin{Bmatrix} \varphi & \varphi' \\ u & x \end{Bmatrix}$$

est permanent et égal à $N + 1$; le tableau est correct.

Pour établir la permanence du rang, il suffira de considérer le système de N + 1 équations aux 2N inconnues υ_j et ξ_j

$$o = \sum_j \varphi_{ij} \upsilon_j + \sum_j \varphi'_{ij} \xi_j,$$

$$o = \sum_j u_j \upsilon_j + \sum_j x_j {}_j\xi$$

et de raisonner comme au 19°.

Si le rang de ϖ est inférieur à N + 1 on peut, au moins d'une façon, trouver N + 1 quantités α_0 et α_i telles que

$$(1) \qquad o = \sum_i \alpha_i \varphi_{ij} - \alpha_0 u_j = \sum_i \alpha_i \varphi'_{ij} - \alpha_0 x_j,$$

ces quantités n'étant pas toutes nulles. Amenons l'élément (x, u) en $(x + dx, u + du)$ et formons les expressions

$$\alpha_0\, d\omega = \alpha_0 \left\{ \sum x\, du + \sum u\, dx \right\},$$

$$\sum \alpha\, d\varphi = \sum_i \alpha_i\, d\varphi_i = \sum_i \alpha_i \left\{ \sum_j \varphi_{ij}\, dx_j + \sum_j \varphi'_{ij}\, du_j \right\}$$

$$= \sum_j dx_j \sum_i \alpha_i \varphi_{ij} + \sum_j du_j \sum_i \alpha_i \varphi'_{ij}.$$

En vertu de (1) il vient

$$(2) \qquad \sum \alpha\, d\varphi - \alpha_0\, d\omega = o,$$

c'est-à-dire $\sum \alpha\, d\varphi = o$, puisque $d\omega = o$.

Mais, en vertu du théorème d'Euler, (1) donne de même

$$(3) \qquad \sum_j x_j \sum_i \alpha_i \varphi_{ij} = m \sum \alpha\varphi = \alpha_0 \sum x u = \alpha_0 \omega = o.$$

Alors, en vertu de (2) et (3),

$$o = \sum \alpha\, dy = \sum_i \alpha_i\, d\frac{\varphi_i}{\varphi_0} = \varphi_0^{-2} \left\{ \varphi_0 \sum \alpha\, d\varphi - d\varphi_0 \sum \alpha\varphi \right\}.$$

Ainsi l'expression $\sum \alpha\, dy$ est nulle, quel que soit le déplacement infinitésimal imprimé à l'élément (x, u).

Revenons aux coordonnées non homogènes μ_β et λ_α du 10°. Les $N - 1$ quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{N-1}$ sont les quotients

$$y_1 : y_N, \quad \ldots, \quad y_{N-1} : y_N.$$

La relation infinitésimale

$$\sum \alpha\, dy = 0$$

devient

$$\sum_s \Lambda_s\, d\mu_s = 0 \qquad \{ s = 1, 2, \ldots. N - 1 \}$$

et est satisfaite pour tout déplacement infinitésimal de (x, u), c'est-à-dire pour tout système de différentielles $d\lambda_\alpha$.

On a ainsi, avec les notations du 10°,

$$0 = \sum_s \Lambda_s \sum_\alpha l_{s\alpha}\, d\lambda_\alpha = \sum_\alpha d\lambda_\alpha \sum_s \Lambda_s l_{s\alpha};$$

les $d\lambda_\alpha$ sont quelconques et

$$0 = \sum_s \Lambda_s l_{s\alpha}.$$

Comme les Λ_s ne sont pas tous nuls, le tableau

$$[l_{s\alpha}], \quad \text{ou} \quad L,$$

à $N - 1$ lignes et $2N - 3$ colonnes a un rang inférieur à $N - 1$. Notamment les déterminants $(N - 1)$-aires de L sont tous nuls.

Mais, dans le déterminant $(2N - 3)$-aire H de la matrice $[l_{\beta\alpha}]$, le tableau L est la zone constituée par les $N - 1$ premières lignes. La zone serait inactive (66°, Deuxième Partie) et le déterminant H s'évanouirait. Cette conséquence est impossible (10°) et le théorème est démontré.

La même démonstration vaut pour les trois tableaux (16°) analogues à $\mathfrak{T}$.

24° Je passe maintenant au tableau

$$|\varphi| = \left| \begin{matrix} \varphi \\ u \end{matrix} \right|$$

à N + 1 lignes et N colonnes.

Le rang de $|\varphi|$ *est permanent.* Considérons, en effet, le système des N + 1 équations

$$\text{(T)} \qquad \sum_j \varphi_{ij} t_j = \sum_j u_j t_j = 0, \qquad [i, j = 1, 2, \ldots, N],$$

aux N inconnues t. Si l'on change (12°) φ_{ij} en $\varphi_{ij} + \alpha_i u_j$, le système T devient

$$\sum_j t_j(\varphi_{ij} + \alpha_i u_j) = \sum_j t_j \varphi_{ij} + \alpha_i \sum_j u_j t_j = \sum_j u_j t_j = 0$$

et ne change pas. Le raisonnement s'achève comme au 19°. Soit r le rang de $|\varphi|$.

Il est facile de calculer l'ordre et la classe des déterminants r-aires fournis par le tableau $|\varphi|$. Les éléments des N premières lignes sont

$$\varphi_{ij}\begin{pmatrix} m-1 & & m' \\ x & ; & u \end{pmatrix};$$

ceux de la dernière sont les u_j, formes ayant zéro pour ordre et 1 pour classe.

Soit h un déterminant r-aire de $|\varphi|$. On aura

$$h\begin{pmatrix} r(m-1) & & rm' \\ x & ; & u \end{pmatrix}$$

si les éléments de la dernière ligne ne figurent pas dans h. Dans le cas contraire, on a

$$h\begin{pmatrix} (r-1)(m-1) & & (r-1)m'+1 \\ x & ; & u \end{pmatrix}.$$

Le rang r de $|\varphi|$ ne peut dépasser N, cas où le tableau est correct. On ne peut avoir $r = 0$. Les cas $r = 1$ ou 2 seront

discutés au Chapitre V. Je supposerai provisoirement que $r \geqq 3$.

25° Je désignerai par r_φ le rang de $\{\varphi\}$. De même, les tableaux

$$\{\varphi'\},\quad \{\psi\},\quad \{\psi'\},\quad \{\theta\},\quad \{\theta'\},\quad \{\eta\},\quad \{\eta'\}$$

auront les rangs respectivement

$$r_{\varphi'},\quad r_\psi,\quad \ldots,\quad r_{\eta'},$$

tous compris entre 3 inclus et N inclus, et tous permanents.

La valeur de ces huit rangs est un très important caractère pour la classification des crémoniennes. Ces huit rangs ne peuvent être à la fois choisis arbitrairement. Nous verrons plus loin (44°) des égalités entre les huit rangs. Voici des inégalités immédiates.

Prenons le tableau (22°) correct

$$\tau = \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \psi \\ u \end{matrix} \right\},$$

et, dans τ, un déterminant N-aire

$$\text{H} \neq 0.$$

Toute ligne de τ appartient soit à $\{\varphi\}$, soit à $\{\psi\}$.

Supposons que H emprunte ρ lignes à $\{\varphi\}$ et $\text{N} - \rho$ lignes à $\{\psi\}$. On aura évidemment, puisque $\text{H} \neq 0$,

$$\rho \leqq r_\varphi, \qquad \text{N} - \rho \leqq r_\psi,$$

et, par addition,

$$r_\varphi + r_\psi \geqq \text{N}. \tag{1}$$

De même

$$r_{\varphi'} + r_{\psi'} \geqq \text{N}; \qquad r_\theta + r_\eta \geqq \text{N}; \qquad r_{\theta'} + r_{\eta'} \geqq \text{N}.$$

Prenons maintenant le tableau (23°) correct

$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{matrix} \varphi & \varphi' \\ u & x \end{matrix} \right\},$$

et, dans ce tableau, un déterminant ($N+1$)-aire

$$g \neq 0.$$

Toute colonne de ϖ est une colonne soit de $\{\varphi\}$, soit de $\{\varphi'\}$. Supposons que g emprunte σ colonnes à $\{\varphi\}$ et $N+1-\sigma$ à $\{\varphi'\}$. Puisque

$$g \neq 0,$$

on a

$$\sigma \leqq r_\varphi, \qquad N+1-\sigma \leqq r_{\varphi'},$$

d'où

$$(2) \qquad r_\varphi + r_{\varphi'} \geqq N+1.$$

Pareillement

$$r_\psi + r_{\psi'} \geqq N+1; \qquad r_\theta + r_{\theta'} \geqq N+1; \qquad r_\eta + r_{\eta'} \geqq N+1.$$

26° Nommons, pour abréger le langage, *conditions de contact* celles qui expriment que l'expression

$$\sum u\,dx$$

est un invariant (4°) vis-à-vis de la crémonienne s. L'expression $\sum \psi\,d\varphi$ ne devra, sous le bénéfice de $\omega = d\omega = 0$, différer de $\sum u\,dx$ que par une forme mixte multiplicateur.

On doit donc avoir

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum \psi\,d\varphi = A\sum u\,dx + A'\sum x\,du, & A'-A \neq 0. \\ \sum \varphi\,d\psi = B\sum u\,dx + B'\sum x\,du, & B'-B \neq 0. \end{cases}$$

Mais

$$\sum \varphi\psi = \omega P \begin{pmatrix} m+n-1 & m'+n'-1 \\ x & ; \quad u \end{pmatrix}$$

$$\sum \varphi\,d\psi + \sum \psi\,d\varphi = P\,d\omega = P\sum u\,dx + P\sum x\,du.$$

D'où

$$(2) \qquad P = A + B = A' + B'.$$

De (1) on tire

$$(3)\quad \begin{cases} \sum_i \psi_i\varphi_{ij} = A\,u_j, & \sum_i \psi_i\varphi'_{ij} = A'\,x_j, \\ \sum_i \varphi_i\psi_{ij} = B\,u_j, & \sum_i \varphi_i\psi'_{ij} = B'\,x_j. \end{cases}$$

D'où l'on voit notamment que A, A′, B, B′ ont, comme P,

$$m + n - 1$$

pour ordre, et

$$m' + n' - 1$$

pour classe.

La permanence des formules (3) est évidente. En effet, changer

$$\varphi_{ij}, \quad \varphi'_{ij}, \quad \psi_{ij}, \quad \psi'_{ij}$$

respectivement (12°) en

$$\varphi_{ij} + \alpha_i u_j, \quad \varphi'_{ij} + \alpha_i x_j, \quad \psi_{ij} + \beta_i u_j, \quad \psi'_{ij} + \beta_i x_j,$$

c'est changer respectivement, dans les formules (3),

$$A, \; A', \; B \quad \text{et} \quad B'$$

en

$$A - \sum \alpha\psi, \quad A' - \sum \alpha\psi, \quad B - \sum \beta\varphi, \quad B' - \sum \beta\psi$$

et P en

$$P - \sum \alpha\psi - \sum \beta\varphi.$$

27° Les tableaux

$$\{\varphi\}, \; \ldots, \; \{\eta'\},$$

dont le rang n'est pas fixé, et dont le rang, par suite, sert à la classification des crémoniennes, se nommeront *tableaux caractéristiques*. Les huit entiers

$$r_\varphi, \; \ldots, \; r_{\eta'}$$

seront les entiers caractéristiques.

CHAPITRE III.

RELATIONS, POUR u CONSTANT, ENTRE LES $\varphi_i(x; u)$.

28° Reprenons les expressions $\varphi_i(x; u)$. Considérons-y les x_i et les u_i comme des variables liées uniquement par la relation $\omega = 0$. Donnons aux u_i des valeurs fixes quelconques et faisons varier les x_i d'une façon quelconque.

Le tableau caractéristique (27°) $\{ \varphi \}$ aura le rang r_φ.

Posons

$$(l,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1).$$

$$(1)\qquad z_l = \sum_j c_{lj} x_j, \qquad 0 = \sum_j u_j x_j \qquad \{ j = 1, 2, \ldots, N \},$$

où les c_{lj} sont des constantes quelconques, telles cependant que le déterminant N-aire

$$D\binom{1}{u} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

De (1) on tirera

$$(2)\qquad x_j = \frac{\sum_k z_k a_{jk}\binom{1}{u}}{D},$$

avec

$$a_{jk} = D\,\frac{\partial x_j}{\partial z_k} = \frac{\partial D}{\partial c_{jk}};$$

$$(3)\qquad \sum_j a_{jk} u_j = \frac{\partial \omega}{\partial z_k} = 0 \qquad \{ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N \}.$$

Les relations (1) donnent :

1° Un système de z_k pour un choix quelconque des x_i, liées par la condition $\omega = 0$;

2° Un système de x_i, liées par $\omega = 0$, pour un choix quelconque des z_k.

En résumé, les z_k peuvent être considérées comme des variables indépendantes.

En particulier, on peut faire, dans les formules (1),

$$z_k = x_k,$$

d'où

$$x_N = -\frac{\sum_k u_k z_k}{u_N}.$$

Cela revient à faire, dans les formules (2),

$$(4) \qquad \left\{ \begin{matrix} a_{lk} = 0 \quad \text{pour} \quad l \neq k; \quad a_{kk} = D = u_N \\ a_{Nk} = -u_k \end{matrix} \right\}.$$

29° Si l'on remplace, dans $\varphi_i(x;\, u)$, x_i par son expression en z_k, on aura l'identité

$$\varphi_i(x;\, u) = F_i(z),$$

où F_i désigne un polynome homogène en z_k, avec des coefficients rationnels en u_i.

Considérons le tableau

$$F = [F_{ik}], \qquad F_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial z_k}, \qquad \left\{ \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, N \\ k = 1, 2, \ldots, N-1 \end{matrix} \right\},$$

à N lignes et N — 1 colonnes. Je me propose de calculer le rang R de F, connaissant le rang r_φ du tableau $|\varphi|$.

Formons, à cet effet, le système des N équations

$$(T) \qquad \sum_k F_{ik} t_k = 0$$

aux N — 1 inconnues t_k. Le degré d'indétermination (18°)

de T sera

$$N - 1 - R.$$

D'autre part (28°),

$$F_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial z_k} = \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial z_k} = D^{-1} \sum_j \varphi_{ij} a_{jk},$$

et T s'écrit

$$\sum_{jk} \varphi_{ij} a_{jk} t_k = \sum_j \varphi_{ij} \tau_j = 0$$

avec

$$\tau_j = \sum_k a_{jk} t_k.$$

Enfin

$$\sum_j u_j \tau_j = \sum_{jk} a_{jk} u_j t_k = \sum_k t_k \sum_j u_j a_{jk} = 0,$$

en vertu des relations (3) du 28°.

Les N quantités τ_j sont liées par les N + 1 relations

$$(\varpi) \qquad \sum_j \varphi_{ij} \tau_j = \sum_j u_j \tau_j = 0.$$

dont les coefficients sont précisément les éléments du tableau $|\varphi|$. Le degré d'indétermination pour le système ϖ est

$$N - r_\varphi,$$

et l'on a

$$(5) \qquad \tau_j = \sum_\sigma c_\sigma P_{j\sigma}, \qquad | \sigma = 1, 2, \ldots, N - r_\varphi |$$

$$c_\sigma = \text{paramètre arbitraire.}$$

Le tableau $[P_{j\sigma}]$ à N lignes et $N - r_\varphi$ colonnes est correct, sans quoi les paramètres c_σ ne seraient point distincts.

Je dis que le tableau $[P_{k\sigma}]$

$$| k = 1, 2, \ldots, N - 1 |$$

à $N - 1$ lignes et $N - r_\varphi$ colonnes est correct aussi. En effet,

si le rang du tableau $[P_{k\sigma}]$ était

$$N - r_\varphi - h, \quad h > 0,$$

on pourrait écrire

$$\tau_k = \sum_{\sigma'} c_{\sigma'} P_{k\sigma'}, \qquad \{ \sigma' = h+1, h+2, \ldots, N - r_\varphi \},$$

ce qui revient à faire

$$(6) \qquad P_{k\sigma} = 0 \qquad \{ k = 1, 2, \ldots, N-1; \qquad \sigma \leqq h \}.$$

La relation

$$0 = \sum_j u_j \tau_j = u_N [c_1 P_{N1} + c_2 P_{N2} + \ldots + c_h P_{Nh}] + \sum_{j\sigma'} P_{j\sigma'} u_j c_{\sigma'} \quad \{ j = 1, 2, \ldots, N \}$$

doit être satisfaite pour tout choix des paramètres c_σ. Cela exige notamment

$$P_{N1} = P_{N2} = \ldots = P_{Nh} = 0,$$

c'est-à-dire [eu égard à (6)]

$$P_{j\sigma} = 0, \qquad \{ j = 1, 2, \ldots, N; \qquad \sigma \leqq h \}.$$

Le degré d'indétermination, pour le système ϖ, serait moindre que $N - r_\varphi$, ce qui est absurde.

Nous retiendrons que *les* $N-1$ *quantités* τ_k *dépendent linéairement de* $N - r_\varphi$ *paramètres arbitraires, homogènes, distincts.*

30° Sans rien changer à la discussion précédente, plaçons-nous, ce qui est évidemment licite, dans le cas particulier des formules (4) du 28°. On a

$$a_{lk} = 0, \qquad l \neq k, \qquad \{ l, k = 1, 2, \ldots, N-1 \}$$

et

$$a_{ll} = u_N.$$

Alors

$$\tau_k = \sum_l a_{kl} t_l = u_N t_k.$$

Donc (29°, *in fine*), t_k dépend linéairement des $N - r_\varphi$ paramètres distincts c_σ, et le degré d'indétermination pour le système T du 29° est $N - r_\varphi$. Nous savons, d'autre part, que ce même degré est (29°) $N - 1 - R$. Alors

$$N - r_\varphi = N - 1 - R, \qquad R = r_\varphi - 1.$$

Il vient ainsi l'énoncé suivant :

Théorème. — *Le rang du tableau* (29°)

$$F = \left[\frac{\partial F_i}{\partial z_k}\right] = [F_{ik}]$$

est inférieur d'une unité au rang r_φ du tableau $|\varphi|$.

31° Les F_i sont des polynomes homogènes par rapport aux z_k, avec des coefficients rationnels en u_i. Le rang de F étant

$$R = r_\varphi - 1,$$

on peut (changeant au besoin le numérotage des F_i, ou des φ_i et des z_k) toujours supposer

$$\begin{vmatrix} F_{11} & \dots & F_{1R} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{R1} & \dots & F_{RR} \end{vmatrix} \neq 0.$$

D'ailleurs R ne peut être que positif, car le minimum de r_φ (25°) est 3.

Alors (König, p. 258 et suivantes), *les quantités* $F_1, F_2, \dots, F_R$, *quand les z_k varient librement, sont indépendantes*.

Or, on a vu (28°) que c'est bien le cas pour les z.

De plus, *il existe*

$$N - R = N - r_\varphi + 1$$

polynomes irréductibles

$$\Phi_s(U_1, U_2, \ldots, U_R; U_s),$$
$$s = R+1, R+2, \ldots, N,$$

à coefficients rationnels en u_i, *tels que l'on a identiquement*

$$\Phi_s(F_1, \ldots, F_R; F_s) = 0.$$

Enfin, *si l'on a une autre relation*

$$\Psi_s(F_1, \ldots, F_R; F_s) = 0,$$

où Ψ_s *est un polynome à coefficients rationnels en* u_i, *alors le polynome*

$$\Psi_s(U_1, \ldots, U_R; U_s),$$

aux indéterminées U, *est divisible par le polynome*

$$\Phi_s(U_1, \ldots, U_R; U_s).$$

Pour toutes démonstrations, je renverrai au Livre de M. König.

32° Théorème. — *Chacun des* $N+1-r_\varphi$ *polynomes* Φ_s *est homogène par rapport aux* $R+1 = r_\varphi$ *indéterminées* $U_1, \ldots, U_R, U_s$ *qu'il contient.*

Supposons le contraire et écrivons

$$\Phi_s(U_1 \ldots; U_s) = \Phi_s(U) = f(U) + f_1(U) + \ldots,$$

$f, f_1, \ldots$ étant homogènes avec les degrés $\Lambda, \Lambda+\Lambda_1, \ldots$ respectivement.

On a l'identité

$$\Phi_s(F) = f(F) + f_1(F) + \ldots = 0. \tag{0}$$

Multiplions les x_i (28°) par un facteur arbitraire t. F_i est multipliée par t^m, car z_k est multipliée par t. L'identité (0) devient

$$\Phi_s(t^m F) = t^{m\Lambda} f(F) + t^{m(\Lambda+\Lambda_1)} f_1(F) + \ldots = 0, \tag{1}$$

et se décompose, puisque t est arbitraire, en

$$(2) \qquad f(\mathrm{F}) = 0, \qquad f_1(\mathrm{F}) = 0, \qquad \ldots.$$

Comme il n'existe aucune relation entre les $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{R}}$ (31°), F_s doit figurer dans chacune des équations

$$f(\mathrm{F}) = 0, \qquad f_1(\mathrm{F}) = 0, \qquad \ldots.$$

Les polynomes (31°) $f(\mathrm{U})$, $f_1(\mathrm{U})$, ... doivent être divisibles par le polynome irréductible $\Phi_s(\mathrm{U})$. Or $f(\mathrm{U})$, $f_1(\mathrm{U})$, ... contiennent seulement une partie des termes de $\Phi_s(\mathrm{U})$ et ne sauraient être divisibles [1] par Φ_s.

Le même raisonnement démontre l'homogénéité des $\Psi_s(\mathrm{U})$ (31°).

Par rapport aux u_i, les expressions $\Phi_s(\mathrm{U}; u)$, $\Psi_s(\mathrm{U}; u)$ sont rationnelles. Je dis de plus qu'*elles sont homogènes*. Voici comment on l'établit.

Quand on multiplie u_i par l'arbitraire t, $x_i = x_i(z; u)$ ne change pas, F_i est multipliée par $t^{m'}$, car m' est la classe de

---

[1] Dans le polynome à $g+1$ indéterminées

$$\mathrm{P}(x, x_1, \ldots, x_g) = \mathrm{A}_0 x^m + \mathrm{A}_1 x^{m-1} + \ldots, \qquad \mathrm{A}_0 \neq 0$$

(où x ne figure plus dans les A), choisissons un groupe de termes

$$\mathrm{Q} = \mathrm{B}_0 x^m + \mathrm{B}_1 x^{m-1} + \ldots.$$

Supposons que P divise Q. Alors $\mathrm{Q} = \mathrm{KP}$, *où* K *ne dépend plus des* x. L'énoncé est évident pour $g = 0$. Je dis que si l'énoncé est vrai pour g, il est vrai aussi pour $g+1$.

En effet, si P divise Q, A_0 divise B_0. Or A_0 et B_0 sont à g indéterminées et le lemme s'applique. $\mathrm{B}_0 = \mathrm{KA}_0$, où K ne dépend plus des x. Alors

$$\mathrm{K} = \mathrm{Q} : \mathrm{P},$$

puisque l'expression

$$\mathrm{Q} - \mathrm{KP} = (\mathrm{B}_1 - \mathrm{KA}_1) x^{m-1} + \ldots$$

doit être divisible par P, c'est-à-dire identiquement nulle.

Ainsi, Q contient non pas une partie, mais la totalité des termes de P, dont Q ne diffère que par un facteur K indépendant des indéterminées x.

$\varphi_i(x; u)$. Le raisonnement ci-dessus peut être répété sur les expressions $\Phi_s(U; u)$ et $\Psi_s(U; u)$ en u_i.

D'autre part, il est évidemment licite de chasser les dénominateurs en $u_1, u_2, \ldots$.

Bref, *les expressions* $\Phi_s(U; u)$, $\Psi_s(U; u)$ *sont, par rapport aux* x_i, *des polynomes homogènes*

33° Les quantités $F_i(z)$ sont proportionnelles aux $\varphi_i(x; u)$. En vertu de l'homogénéité des polynomes $\Phi_s(U)$ et $\Psi_s(U)$ (32°), il est possible d'énoncer l'importante proposition que voici :

Théorème. — *Si l'on se donne le plan u quelconque, les* N *quantités* $\varphi_i(x; u)$ *se comportent ainsi :*

I. *Entre* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_R$, $R = r_\varphi - 1$, *n'existe aucune relation*

$$\Omega(\varphi; u) = 0,$$

où Ω *est un polynome homogène en* $\varphi_1, \ldots, \varphi_R$, *à coefficients polynomes homogènes en* u_i.

II. *Il existe* $N + 1 - r_\varphi$ *relations*

$$\Phi_s(\varphi_1, \ldots, \varphi_R; \varphi_s; u) = 0, \qquad s = R + 1, \ldots, N,$$

où Φ_s *est un polynome homogène en* $\varphi_1, \ldots, \varphi_R, \varphi_s$, *à coefficients polynomes homogènes en* u_i.

III. *Le polynome* $\Phi_s(U_1, \ldots, U_R; U_s; u)$ *aux indéterminées* $U_1, \ldots, U_R, U_s$ *est irréductible.*

IV. *S'il existe une relation*

$$\Psi(\varphi_1, \ldots, \varphi_R; \varphi_s; u) = 0$$

de même nature que $\Phi_s = 0$, *alors le polynome*

$$\Psi(U_1, \ldots, U_R; U_s; u)$$

est divisible par le polynome irréductible

$$\Phi_s(U_1, \ldots, U_R; U_s; u).$$

34° Posons

$$y_i = \varphi_i : \varphi_0;$$

en vertu de l'homogénéité des Ω, des Ψ et des Φ, tout le théorème précédent subsiste, lorsqu'on écrit y_i au lieu de φ_i. Les $N - 1$ quantités y_i sont liées par $N + 1 - r_\varphi$ équations homogènes distinctes, mais on peut prendre arbitrairement $N - 1 - (N + 1 - r_\varphi) = r_\varphi - 2$ des quantités y.

Nous venons donc de construire, dans le présent Chapitre, les relations qui existent, pour $u_i =$ const., entre les φ_i ou les y_i. Ces relations sont exactement au nombre de $N + 1 - r_\varphi$ distinctes, r_φ étant toujours le rang du tableau $|\varphi|$.

CHAPITRE IV.

VARIÉTÉS PRIMORDIALES.

35° Quand le point x parcourt le plan u, *quelconque* dans l'espace, et prend sur u les

$$\infty^{N-2}$$

positions possibles, l'élément

$$(y, v) = s[(x, u)],$$

image de (x, u) par la crémonienne s, se meut à son tour. La *figure* ou *variété primordiale* $\mathfrak{P}_u$ sera l'ensemble des positions que prend (y, v). La *primordiale ponctuelle* Y_u sera l'ensemble des positions que prend y. La *primordiale planaire* V_u sera l'ensemble des positions que prend le plan v.

Faisons tourner le plan u autour du point quelconque x. Il y aura une primordiale $\mathfrak{P}_x$, une primordiale ponctuelle Y_x, une primordiale planaire V_x.

Pareillement, pour la crémonienne s^{-1}, on aura les figures analogues

$$\mathfrak{P}'_v, \quad \mathfrak{P}'_y, \quad X_v, \quad X_y, \quad U_v, \quad U_y,$$

ensemble des positions que prennent l'élément

$$(x, u) = s^{-1}[(y, v)],$$

image de (y, v) par s^{-1}, le point x, le plan u, ...

36° Lemme. — *Soit* (x, u) *un élément* quelconque *de l'espace. Il n'existe aucune direction d'avancement telle*

que l'élément (x, u) venant, suivant cette direction, en

$$(x + dx,\ u + du),$$

l'élément image (y, v) ne bouge pas.

En effet, définissons (x, u) et (y, v) par leurs coordonnées non homogènes λ_α et μ_β respectivement $\{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2N-3\}$. On aurait (10°), pour un choix convenable des différentielles $d\lambda_\alpha$,

$$d\mu_\beta = \sum_\alpha l_{\beta\alpha}\, d\lambda_\alpha = 0.$$

Le déterminant des $l_{\beta\alpha}$ serait zéro, ce qui est absurde (10°).

37° Théorème. — *Toute primordiale Φ_u, Φ_x, Φ'_v, Φ'_y est une variété à $N-2$ dimensions.*

Autrement dit, *les coordonnées de l'élément courant sur la primordiale dépendent de $N-2$ paramètres arbitraires distincts.*

Les coordonnées d'un point qui parcourt un plan donné quelconque, les coordonnées d'un plan qui tourne autour d'un point donné quelconque, dépendent de $N-2$ paramètres.

Soient, par exemple, le plan u et la primordiale Φ_u. Un point quelconque x de u fait avec u un élément (x, u) *quelconque*. Il y a, sur u, ∞^{N-2} points x, et, sur Φ_u, ∞^{N-2-h} éléments (y, v), $h \geqq 0$. Si $h > 0$, à (y, v) donné sur Φ_u correspondrait sur un u une infinité de points x, et, notamment, au moins un point $x + dx$. Alors les deux éléments (x, u) et $(x + dx, u)$ auraient même image (y, v). Cela est contraire au lemme du 36°.

Le théorème est ainsi démontré.

38° Théorème. — *La primordiale ponctuelle Y_u est une variété à $r_\varphi - 2$ dimensions, r_φ étant le rang du tableau $\{\varphi\}$.*

La figure Y_u est le lieu des points y tels que

$$y_i = \varphi_i(x; \underline{u}) : \varphi_0(x; \underline{u}),$$

le soulignement indiquant que u est donné.

En vertu des théories exposées au Chapitre III, il y a entre les N quantités y_i les $N + 1 - r_\varphi$ équations distinctes

$$\Phi_s(y_1, y_2, \ldots, y_{r_\varphi - 1}; y_s; u) = 0,$$
$$s = r_\varphi, \quad r_\varphi + 1, \quad \ldots, \quad N,$$

avec la condition habituelle $y_0 = 1$. On peut prendre arbitrairement $r_\varphi - 2$ des quantités y, c'est-à-dire exprimer toutes les N quantités y_i en fonction de ces $r_\varphi - 2$ là.

C. Q. F. D.

39° On a ainsi le Tableau suivant, en répétant, pour V_u, ..., le raisonnement du 38° :

PRIMORDIALE.	NOMBRE DES DIMENSIONS.	
Y_u	$r_\varphi - 2$	$\mathfrak{P}_u$
V_u	$r_\psi - 2$	
Y_x	$r_{\varphi'} - 2$	$\mathfrak{P}_x$
V_x	$r_{\psi'} - 2$	
X_v	$r_\theta - 2$	$\mathfrak{P}'_v$
U_v	$r_\eta - 2$	
X_y	$r_{\theta'} - 2$	$\mathfrak{P}'_y$
U_y	$r_{\eta'} - 2$	

On a vu (24°) que les huit entiers $r_\varphi - 2$, ..., $r_{\eta'} - 2$ sont positifs.

40° Les $N + 1 - r_\varphi$ équations du 38°

$$\Phi_s(y; u) = \Phi_s(y_1, y_2, \ldots, y_{r_\varphi - 1}; y_s; u) = 0,$$
$$s = r_\varphi, \quad r_\varphi + 1, \quad \ldots, \quad N$$

seront dites les *équations de la primordiale ponctuelle* Y_u. Φ_s est une forme à deux séries de variables, les y_i et les u_i.

Les équations $\Phi_s = 0$ prendront le nom d'*équations primordiales*.

Plus généralement, considérons les quatre séries de N va-

riables homogènes

$$\left.\begin{matrix} x_i \\ u_i \end{matrix}\right\} \text{ coordonnées de l'élément } (x, u),$$

$$\left.\begin{matrix} y_i \\ v_i \end{matrix}\right\} \quad » \quad (y, v),$$

où (y, v) est l'élément-image de l'élément (x, u).

Associons, dans une forme P à deux séries de N variables :

Une série de variables empruntée à l'élément (x, u);

Une série de variables empruntée à l'élément (y, v).

En égalant à zéro la forme P, on aura une *équation primordiale*.

Il y aura des équations primordiales de quatre sortes :

$$P(x; y) = 0; \qquad P(x; v) = 0; \qquad P(u; y) = 0; \qquad P(u; v) = 0.$$

41° Les rangs des huit tableaux $|\varphi|, \ldots, |\eta'|$ ne peuvent être simultanément choisis au hasard. Il y a entre les huit rangs des relations qu'il importe d'établir.

Reprenons le tableau du 39°, la primordiale Φ'_y et la primordiale planaire U_y, cette dernière (39°) à $r_{\eta'} - 2$ dimensions.

On pourra donc écrire

$$(o) \qquad \left\{ \begin{array}{l} du_j = \sum\limits_\sigma p_{j\sigma}\, dc_\sigma, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \\ \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, r_{\eta'} - 2, \end{array} \right.$$

où les dc_σ sont des paramètres infinitésimaux arbitraires distincts. Par suite, le tableau $[p_{j\sigma}]$ à N lignes et $r_{\eta'} - 2$ colonnes sera correct.

Autrement dit :

Le degré d'indétermination ζ pour un avancement infinitésimal du plan u sur la variété U_y *est*

$$\zeta = r_{\eta'} - 2.$$

42° Nous allons évaluer maintenant l'entier ζ d'une autre façon.

Pour qu'un déplacement infinitésimal de l'élément (x, u) ait lieu sur la variété $\mathfrak{L}'_y$, ou qu'un déplacement infinitésimal du plan u ait lieu sur U_y, il faut et il suffit d'avoir

$$dy_i = d\frac{\varphi_i}{\varphi_0} = \varphi_0\, d\varphi_i - \varphi_i\, d\varphi_0 = 0$$

ou

$$0 = d\varphi_i - \frac{d\varphi_0}{m\varphi_0} m\varphi_i = \sum_j \varphi_{ij}\, d\xi_j + \sum_j \varphi'_{ij}\, du_j,$$

eu égard au théorème d'Euler

$$m\varphi_i = \sum_j \varphi_{ij} x_j,$$

et posant

$$d\xi_j = dx_j - \frac{d\varphi_0}{m\varphi_0} x_j.$$

De plus

$$d\omega = \sum x\, du + \sum u\, dx = 0.$$

On a ainsi, entre les différentielles, le système des $N+1$ équations, à $2N$ inconnues $d\xi_j$ et du_j,

$$(h) \qquad \left\{ \begin{array}{l} h_i = \sum_j \varphi_{ij}\, d\xi_j + \sum_j \varphi'_{ij}\, du_j = 0 \\ \varphi_{N+1} = \omega; \qquad i = 1, 2, \ldots, N+1 \end{array} \right\}.$$

Ces $N+1$ équations sont toutes distinctes, car le tableau (23°)

$$\left\{ \begin{array}{cc} \varphi & \varphi' \\ u & x \end{array} \right\}$$

est correct, avec le rang $N+1$.

Prenons une matrice $(N+1)$-aire

$$g = [g_{il}], \qquad |g| \neq 0 \qquad \{i, l = 1, 2, \ldots, N+1\}.$$

On obtiendra un système (H) en effectuant sur les h_i la collinéation g. Les systèmes (h) et (H) seront équivalents, $g_{il} = \text{const.}$:

$$
(\text{H}) \quad \begin{cases} \text{H}_i = \sum_l g_{il} h_l = \sum_{lj} g_{il} \varphi_{lj}\, d\xi_j + \sum_{lj} g_{il} \varphi'_{lj}\, du_j \\ \qquad = \sum_j a_{ij}\, d\xi_j \quad + \sum_j b_{ij}\, du_j \;\; = 0, \\ a_{ij} = \sum_l g_{il} \varphi_{lj}; \qquad b_{ij} = \sum_l g_{il} \varphi'_{lj}. \end{cases}
$$

Le système T, de N équations à N + 1 inconnues t_l,

$$
(\text{T}) \qquad \sum_l t_l \varphi_{lj} = 0 \qquad \begin{Bmatrix} l = 1, 2, \ldots, \text{N} + 1 \\ j = 1, 2, \ldots, \quad \text{N} \end{Bmatrix}
$$

a pour tableau des coefficients des inconnues le tableau $|\varphi|$, de rang r_φ. T a le degré $\text{N} + 1 - r_\varphi$ d'indétermination.

Il y aura $\text{N} + 1 - r_\varphi$ solutions ϖ_ρ, linéairement indépendantes, $\rho = 1, 2, \ldots, \text{N} + 1 - r_\varphi$ [*voir* Frobenius, *Ueber das Pfaffsche Problem* (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXII, p. 236 et suiv.)]. La solution ϖ_ρ sera constituée par les N + 1 quantités $\tau_{\rho l}$, et le tableau $[\tau_{\rho l}]$ à $\text{N} + 1 - r_\varphi$ lignes et N + 1 colonnes sera correct.

Nous pouvons donc obtenir une matrice (N + 1)-aire g, avec $|g| \neq 0$, en constituant les $\text{N} + 1 - r_\varphi$ dernières lignes de g avec les $\tau_{\rho l}$, et les r_φ premières lignes avec des constantes g_{il} convenablement choisies.

Posons

$$
g_{r_\varphi + \rho, l} = \tau_{\rho l}, \qquad \rho = 1, 2, \ldots, \text{N} + 1 - r_\varphi,
$$

d'où [formule (H) ci-dessus]

$$
a_{r_\varphi + \rho, j} = \sum_l \tau_{\rho l} \varphi_{lj} = 0.
$$

Les $\text{N} + 1 - r_\varphi$ dernières équations de (H) ne contiendront plus les $d\xi_j$.

Au contraire, on ne peut avoir encore

$$a_{ij} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

pour un indice i, $i \leqq r_\varphi$, car les g_{il} correspondants formeraient une $(N + 2 - r_\varphi)^{\text{ième}}$ solution de (T) et le déterminant $|g|$ serait nul comme ayant inactive (66°, Deuxième Partie) la zone de ses $N + 2 - r_\varphi$ dernières lignes.

43° Bref, le système H s'écrit

$$(\mathrm{H})' \quad \begin{cases} \mathrm{H}_i = \sum_j a_{ij}\, d\xi_j + \sum_j b_{ij}\, du_j = 0, & i = 1, 2, \ldots, r_\varphi, \\ \mathrm{H}_\rho = \qquad\qquad \sum_j b_{\rho j}\, du_j = 0, & r_\varphi < \rho \leqq N + 1. \end{cases}$$

Le tableau $[a_{ij}]$ à N colonnes et r_φ lignes est correct. Sinon, on pourrait former une expression

$$\sum_i \mathrm{K}_i \mathrm{H}_i,$$

où les $d\xi$ ne figureraient plus, ce qui est absurde (42°).

Si donc on a choisi un système de du_j satisfaisant aux équations

$$(\mathrm{B}) \qquad \sum_j b_{\rho j}\, du_j = 0,$$

on achèvera la résolution de (H)′ en tirant, des r_φ premières équations, r_φ des ξ_j.

Enfin le tableau $[b_{\rho j}]$ est lui-même correct. Sinon, le nombre des équations (B) distinctes se réduirait et (H′), équivalent à (H) et à (h) (42°), ne contiendrait plus $N + 1$ équations distinctes.

Comme résultat de la présente discussion, il vient l'énoncé suivant :

Les conditions $dy_i = 0$ se traduisent d'une façon com-

plète, sur les du_j, par les $N+1-r_\varphi$ équations distinctes

$$\text{(B)} \qquad \sum_j b_{\rho j}\, du_j = 0,$$

auxquelles il faut ajouter la $(N+2-r_\varphi)^{\text{ième}}$

$$du_0 = \sum_j g_j\, du_j = 0.$$

Le degré d'indétermination ζ pour les du_j est ainsi

$$N-(N+2-r_\varphi) = r_\varphi - 2.$$

On a vu (41°) que ce même degré d'indétermination ζ est

$$r_{\eta'} - 2.$$

Donc *les deux tableaux* $|\varphi|$ *et* $|\eta'|$ *ont le même rang.*

44° $r_\varphi - 2$, c'est le nombre de dimensions qu'a la variété Y_u; $r_{\eta'} - 2$, c'est le même nombre pour la variété U_y. On peut dire aussi que *les variétés* U_y *et* Y_u *ont même nombre de dimensions.*

Il en sera pareillement pour Y_x et X_y; donc (tableau du 39°)

$$r_{\varphi'} = r_{\theta'}.$$

Prenant V_u et U_v, on aura

$$r_\psi = r_\eta.$$

Prenons V_x et X_v, il viendra

$$r_\theta = r_{\psi'}.$$

Les huit tableaux $|\varphi|, \ldots, |\eta'|$ se disposent ainsi par couples de même rang

$$|\varphi| \text{ et } |\eta'|; \quad |\varphi'| \text{ et } |\theta'|; \quad |\psi| \text{ et } |\eta|; \quad |\theta| \text{ et } |\psi'|.$$

45° Les deux variétés ponctuelle et planaire, qui entrent dans une même primordiale $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$, ont entre elles des relations fort étroites qu'il importe d'élucider.

La variété formée par les ∞^{N-2} éléments adhérents à un point ou à un plan est une variété intégrale (Généralités, 10°); il en est de même pour une variété primordiale $\mathfrak{L}$ ou $\mathfrak{L}'$, constituée par les éléments-images des éléments de la première variété.

Introduisons les définitions suivantes. Soit une variété ponctuelle Y, lieu du point y. Le plan w *touchera* Y en y, si w passe par y et par *tout* point $y + dy$, situé sur Y. De même, pour une variété planaire V, lieu du plan v, le point z sera le *point de contact* de v avec V si z est sur le plan v et sur *tout* plan $v + dv$, situé sur V.

46° Prenons maintenant les variétés primordiales $\mathfrak{L}_u$, Y_u, V_u. En vertu des explications ci-dessus, *les plans v qui, avec un point donné y de Y_u, donnent des éléments de $\mathfrak{L}_u$, doivent être cherchés parmi les plans tangents w en y à Y_u.*

Soient, en effet :

y et $y + dy$ deux points voisins *quelconques* sur Y_u,
v et $v + dv$ deux plans associés avec y et $y + dy$ respectivement,
pour constituer les éléments (y, v) et $(y + dy, v + dv)$ de $\mathfrak{L}_u$.

Les deux éléments sont en situation réunie et l'on a notamment

$$\sum v\, dy = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On verra de même, par dualité, que *les points y qui, avec un plan donné v de V_u, donnent des éléments de $\mathfrak{L}_u$, doivent être cherchés parmi les points de contact z de v avec V_u.*

47° Cherchons les plans tangents w à Y_u en y.

Posons $r_\varphi = r$ et prenons les $N + 1 - r$ équations primordiales (38°) qui définissent Y_u, savoir :

$$(0) \qquad \begin{cases} f_s(y_1, \ldots, y_{r-1}; y_s; u) = 0, \\ s = r, r+1, r+2, \ldots, N. \end{cases}$$

d'où, par différentiation,

$$df_s = f_{ss}\,dy_s + \sum_\alpha f_{s\alpha}\,dy_\alpha = 0,$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, r-1, \qquad f_{s\alpha} = \frac{\partial f_s}{\partial y_\alpha}, \qquad \ldots;$$

$\sum w\,dy = 0$ doit être une conséquence des égalités $df_s = 0$. On a *identiquement*, pour λ_s et ρ convenablement choisis,

$$\begin{aligned} 0 = \quad & \sum_s \lambda_s\,df_s - \rho\sum w\,dy \quad = \sum_s \lambda_s \Big\{ f_{ss}\,dy_s + \sum_\alpha f_{s\alpha}\,dy_\alpha \Big\} \\ & - \rho\sum_s w_s\,dy_s - \rho\sum_\alpha w_\alpha\,dy_\alpha = \sum_s dy_s \{\lambda_s f_{ss} - \rho w_s\} \\ & + \sum_\alpha dy_\alpha \Big\{ \sum_s \lambda_s f_{s\alpha} - \rho w_\alpha \Big\} = \sum_{j=1}^{j=\mathrm{N}} \mathrm{G}_j\,dy_j. \end{aligned}$$

La relation $\sum \mathrm{G}\,dy$ doit être une conséquence de

$$dy_0 = \sum e\,dy = 0$$

et

$$\begin{Vmatrix} \mathrm{G}_1 & \mathrm{G}_2 & \ldots & \mathrm{G}_\mathrm{N} \\ e_1 & e_2 & \ldots & e_\mathrm{N} \end{Vmatrix} = 0.$$

Comme les e sont des constantes numériques arbitraires, il faut avoir $\mathrm{G}_j = 0$, c'est-à-dire

$$(1) \qquad \rho w_s = \lambda_s f_{ss}, \qquad \rho w_\alpha = \sum_s \lambda_s f_{s\alpha}.$$

Il viendrait d'abord

$$\begin{aligned} \rho\sum wy &= \sum_s \lambda_s f_{ss}\,y_s + \sum_{s\alpha} \lambda_s f_{s\alpha}\,y_\alpha \\ &= \sum_s \lambda_s \Big\{ f_{ss}\,y_s + \sum_\alpha f_{s\alpha}\,y_\alpha \Big\} = \sum_s \lambda_s f_s = 0, \end{aligned}$$

en vertu du théorème d'Euler, ce qui était à prévoir.

Des relations (1) on tire $\lambda_s = \rho w_s f_{ss}^{-1}$ et, finalement,

$$(2) \qquad w_\alpha = \sum_s w_s f_{s\alpha} f_{ss}^{-1}.$$

D'ailleurs $f_{ss} \neq 0$, car si y_s ne figurait pas dans f_s, les y_α seraient liées par la relation $f_s = 0$, ce qui est absurde (38°).

Les $r - 1$ équations (2), jointes à $w_0 = 1$, laissent arbitraires $N - r$ des quantités w.

Donc : *en un point y de Y_u existent ∞^{N-r} plans w tangents à $\mathfrak{P}_u$.*

On peut d'ailleurs prendre à volonté les $N - r$ rapports des $N + 1 - r$ quantités w_s.

Comme il y a (38°) ∞^{r-2} points y sur Y_u, il y a en tout

$$\infty^{r-2} \times \infty^{N-r} = \infty^{N-2}$$

éléments adhérents à Y_u.

48° Revenons maintenant aux plans v qui, avec y, font des éléments de $\mathfrak{P}_u$.

On a entre les v_i les relations (2) du 47°

$$v_\alpha = \sum_s v_s f_{s\alpha} f_{ss}^{-1};$$

tous les v sont des plans w tangents à Y_u en y. Je dis que *réciproquement tout plan w est un plan v.*

En effet, admettons le contraire. Supposons que, parmi les ∞^{N-r} plans w tangents à Y_u en y, il y en ait seulement $\infty^{N-r-\rho}$ plans v. La primordiale $\mathfrak{P}_u$ contiendrait, puisqu'il y a ∞^{r-2} points y, seulement $\infty^{N-\rho-2}$ éléments (y, v), au lieu de ∞^{N-2}, ce qui est absurde (37°).

Il vient, en résumé, la double proposition suivante, où je rétablis r_φ pour r.

THÉORÈME. — *Les* ∞^{N-2} *éléments* (y, v) *de la primordiale* $\mathfrak{P}_u$ *s'obtiennent, à volonté, en associant :*

soit à chacun des

$$\infty^{r_\varphi - 2}$$

points y *de la variété primordiale ponctuelle* Y_u, *les*

$$\infty^{N-r_\varphi}$$

plans v *tangents à* Y_u *en* y ;

soit à chacun des

$$\infty^{r_\psi - 2}$$

plans v *de la variété primordiale planaire* V_u, *les*

$$\infty^{N-r_\psi}$$

points y, *en lesquels* v *touche la variété* V_u.

On construira de même

$\mathfrak{P}_x$	au moyen de	Y_x	et de	V_x,
$\mathfrak{P}'_v$	»	X_v	»	U_v,
$\mathfrak{P}'_y$	»	X_y	»	U_y.

49° Quant aux variétés telles que $Y_u, \ldots, U_y$, elles doivent être considérées comme connues.

Soit, par exemple, Y_u. On considérera les variables z du Chapitre III et les polynomes $F_i(z)$ en z.

Alors les polynomes Φ_s du 31° s'obtiennent au moyen des $F_i(z)$, où les z et les u sont traitées comme des indéterminées, par les opérations, strictement rationnelles, qu'on trouvera indiquées dans le Livre de M. König (Chap. V, § 14 du Livre). Les Φ_s sont donc connus et, par conséquent, aussi la variété ponctuelle Y_u.

50° Au Chapitre VI (71° à 73°) on achèvera de préciser la notion de variété primordiale.

CHAPITRE V.

SUBSTITUTIONS CRÉMONIQUES.

51° Je me propose d'étudier les crémoniennes, où au moins un des huit entiers

$$r_\varphi, \quad r_{\varphi'}, \quad \ldots, \quad r_{\eta'}$$

a les valeurs 1 ou 2, réservées dans la discussion (24°) du Chapitre II. J'étudierai, à ce point de vue, le tableau $|\varphi|$ et son rang $r_\varphi = r$.

Occupons-nous d'abord de l'éventualité $r = 1$.

Si les variables x manquent dans les formes φ_i, on a

$$m = 0, \qquad \varphi_{ij} = 0;$$

dans le tableau $|\varphi|$, ne sont différents de zéro que les éléments u_j de la $(N+1)^{\text{ième}}$ et dernière ligne, et l'on a bien

$$r = 1.$$

Je dis que la condition est nécessaire. Supposons, en effet, que l'un des φ_{ij}, φ_{11} par exemple, soit $\neq 0$. Alors le déterminant binaire

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{1j} \\ u_1 & u_j \end{vmatrix} = \varphi_{11} u_j - u_1 \varphi_{1j} = 0$$

et $\varphi_{11} u_j = u_1 \varphi_{1j}$. Si l'ordre m de φ_i n'était pas zéro, puisque $\varphi_{11} \neq 0$, on aurait

$$\varphi_{11}\omega = 0 = m u_1 \varphi_1 \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 = 0,$$

ce qui est absurde.

52° Ainsi : *il y a équivalence complète entre les deux hypothèses* $r_\varphi = 1$ et $m = 0$ et, de même, *entre les hypothèses*

$$\begin{array}{ll} r_{\varphi'} = 1, & m' = 0, \\ r_\psi = 1, & n = 0, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ r_{\eta'} = 1, & q' = 0. \end{array}$$

53° Examinons maintenant le cas $r = 2$. On ne peut faire $m = 0$, car alors $r = 1$. Je vais montrer que l'hypothèse $r = 2$, $m > 0$ est absurde.

Le tableau $\{\varphi\}$ peut s'écrire

$$\{\varphi\} = [\varphi_{kj}], \qquad k = 1, 2, \ldots, N+1$$

avec

$$\varphi_{N+1} = \omega, \qquad \varphi_{N+1,j} = u_j.$$

Appliquons la formule (o) du 73° (Deuxième Partie). On a

$$\text{(o)} \qquad Q\varphi_{kj} = \sum_s E_{ks} D_{js}, \qquad s = 1, 2, \ldots, r,$$

autrement dit

$$Q\varphi_{ij} = \sum_s E_{is} D_{js}, \qquad Q u_j = \sum_s E_{N+1,s} D_{js}.$$

Soit $E_{N+1,\sigma} = K \neq 0$, σ étant un certain des indices s; on pourra écrire

$$\text{(1)} \qquad KQ\varphi_{ij} = K \sum_s^{s \neq \sigma} E_{is} D_{js} \quad + KE_{i\sigma} D_{j\sigma},$$

$$\text{(2)} \qquad Q u_j = \sum_s^{s \neq \sigma} E_{N+1,s} D_{js} + KD_{j\sigma},$$

$$KQ\varphi_{ij} = K \sum_s^{s \neq \sigma} E_{is} D_{js} \quad + E_{i\sigma} \left\{ Q u_j - \sum_s^{s \neq \sigma} E_{N+1,s} D_{js} \right\}$$

$$= QE_{i\sigma} u_j + \sum_s^{s \neq \sigma} D_{js} \{ KE_{is} - E_{i\sigma} E_{N+1,s} \}.$$

Cette dernière formule revient en somme à faire, dans la formule

$$(3) \qquad Q\varphi_{ij} = \sum_s E_{is} D_{js},$$

$D_{jr} = u_j$, en changeant légèrement le sens des coefficients Q, E, D.

En particulier pour $r = 2$, on peut écrire

$$(4) \qquad Q\varphi_{ij} = L_i D_j + M_i u_j$$

en faisant $E_{i1} = L_i$, $D_{j1} = D_j$, $E_{i2} = M_i$, avec, bien entendu,

$$D_{j2} = u_j.$$

54° Dans la formule (4) ci-dessus, mettons en évidence les p. g. c. d. Λ, M et Δ des formes mixtes L_i, M_i et D_j, de façon que

$$L_i = \Lambda l_i, \qquad M_i = M\mu_i, \qquad D_j = \Delta d_j,$$

les l_i, les μ_i et les d_j étant respectivement premiers entre eux. Changeons Q en $\frac{1}{m}$Q. Il viendra successivement

$$Q\varphi_{ij} = m\Lambda\Delta l_i d_j + mM\mu_i u_j,$$

$$Q\varphi_i = \Lambda\Delta l_i D \qquad \text{(théorème d'Euler)},$$

$$D = \sum_j x_j d_j.$$

Comme les φ_i sont premiers entre eux, ainsi que les l_i, on a

$$Q = \Lambda\Delta D, \qquad l_i = \varphi_i,$$

et il vient la formule

$$(5) \qquad \varphi_{ij} D = m\varphi_i d_j + m\mathfrak{M}\mu_i u_j,$$

$$M = \mathfrak{M}\Lambda\Delta,$$

après départ du facteur $\Lambda\Delta$, qui divise évidemment M. Introduisons les $N-1$ variables z_k, $\{k = 1, 2, \ldots, N-1\}$, et les polynomes $F(z)$ des 28° et 29°.

Formons

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\frac{F_i}{F_0}=\frac{\partial}{\partial z_k}\frac{\varphi_i}{\varphi_0}=\frac{1}{\varphi_0^2}\begin{vmatrix}\sum_j \varphi_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial z_k} & \varphi_i \\ \sum_j \varphi_{0j}\frac{\partial x_j}{\partial z_k} & \varphi_0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\varphi_0^2 D}\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial z_k}\begin{vmatrix} m\varphi_i d_j + m\mathfrak{M}\mu_i u_j & \varphi_i \\ m\varphi_0 d_j + m\mathfrak{M}\mu_0 u_j & \varphi_0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{m\mathfrak{M}\begin{vmatrix}\mu_i & \varphi_i \\ \mu_0 & \varphi_0\end{vmatrix}}{\varphi_0^2 D}\sum_j u_j\frac{\partial x_j}{\partial z_k},$$

sous le bénéfice de la formule (5).

Mais

$$\sum_j u_j\frac{\partial x_j}{\partial z_k}=\frac{\partial}{\partial z_k}\sum ux=\frac{\partial\omega}{\partial z_k}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\frac{\varphi_i}{\varphi_0}=0. \tag{6}$$

$\varphi_i : \varphi_0$ ne dépend plus des z, c'est-à-dire (28°) des x_i, et ne peut plus dépendre que des u_i.

On égalera donc la fraction irréductible $\varphi_i : \varphi_0$ à la fraction irréductible $p_i(u) : p_{i0}(u)$. De là

$$p_{i0}\varphi_i = p_i\varphi_0.$$

p_i divise

$$\varphi_i; \qquad \varphi_i = p_i f_i; \qquad \varphi_0 = p_{i0} f_i.$$

Les facteurs premiers de

$$\varphi_0 = \sum_i e_i\varphi_i$$

changent tous avec le choix des constantes numériques arbitraires e_i. Donc f_i ne peut diviser φ_0 qu'en devenant une constante.

Les x_i ne figurent pas dans les φ_i et $m=0$, ce qu'on a exclu (53°).

Bref, on ne peut faire $r = r_\varphi = 2$. Raisonnons de même

sur les sept autres tableaux tels que $\{\varphi\}$; il viendra l'énoncé suivant :

Aucun des huit tableaux $\{\varphi\}$, ..., $\{\eta'\}$ *n'a son rang égal à* 2.

55° Nommons *crémonique* toute crémonienne où l'un au moins des huit entiers r_φ, ..., $r_{\eta'}$ est égal à 1.

On n'a pas *de plano* le droit d'écrire, entre les huit entiers caractéristiques r_φ, ..., r_η, d'une canonique, les quatre relations (44°, *in fine*)

$$r_\varphi = r_{\eta'}, \qquad r_{\varphi'} = r_{\theta'}, \qquad r_\psi = r_\eta, \qquad r_\theta = r_{\psi'}.$$

Cela tient à ce que l'on a, dans la théorie du Chapitre IV et des précédents, admis (24°) que tout tableau caractéristique a un rang au moins égal à 3. Chaque entier caractéristique d'une crémonique est à calculer, par suite, directement.

Sans restreindre la généralité (9°), il est licite de faire $r_{\varphi'} = 1$ et (52°) $m' = 0$. Les u ne figurent plus dans les φ_i. Le point y ne dépend que du point x.

THÉORÈME. — *On a* $r_\varphi = \mathrm{N}$.

Il suffit de montrer que le déterminant N-aire $|\varphi_{ij}|$, formé par les N premières lignes du tableau $\{\varphi\}$, est $\neq 0$. Reprenons le tableau (23°) correct

$$\varpi = \begin{Bmatrix} \varphi & \varphi' \\ u & x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi & 0 \\ u & x \end{Bmatrix} \qquad (\text{car } \varphi'_{ij} = 0),$$

à 2N colonnes et N + 1 lignes. Formons un déterminant (2N)-aire T en ajoutant, à ϖ, N — 1 lignes formées par des constantes arbitraires. Comme le rang de ϖ est N + 1, on a $\mathrm{T} \neq 0$. Or T contient $|\varphi_{ij}|$ en facteur, et $|\varphi_{ij}| \neq 0$.

C. Q. F. D.

56° *Le point* x *ne dépend que du point* y.

Prenons y fixe et $dy_i = 0$ et voyons quel degré d'indéter-

mination subsiste pour les déplacements infinitésimaux dx. On a

$$\varphi_0^2\, dy_i = \varphi_0\, d\varphi_i - \varphi_i\, d\varphi_0 = 0,$$

$$\sum_i \varphi_{ij} \left\{ \varphi_0\, dx_j - x_j \frac{d\varphi_0}{m} \right\} = 0.$$

Or

$$|\varphi_{ij}| \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dx_j}{x_j} = \frac{d\varphi_0}{m\varphi_0}$$

ou

$$0 = dx_0 = \frac{d\varphi_0}{m\varphi_0},$$

c'est-à-dire, toujours puisque $|\varphi_{ij}| \neq 0$,

$$0 = d\varphi_i = dx_j.$$

Pour y donné, x est aussi donné. C. Q. F. D.

Il résulte de là que les v ne figurent pas dans les rapports $x_i = \theta_i : \theta_0$, ni, comme les θ_i sont des formes mixtes sans diviseur commun, dans les θ_i; $p' = 0$, $r_{0'} = 1$.

Donc *l'inverse d'une crémonique est aussi une crémonique.*

D'ailleurs $r_\theta = N$ (55°), car $|\theta_{ij}| \neq 0$.

57° On a ainsi

$$y_i \varphi_0(x) = \varphi_i(x), \qquad x_i \theta_0(y) = \theta_i(y).$$

Il existe entre x et y une correspondance birationnelle. Autrement dit, $y = \sigma[x]$, σ étant la substitution ponctuelle Cremona

$$\sigma = |z \quad \varphi(z)| \qquad \text{avec} \qquad \sigma^{-1} = |z \quad \theta(z)|.$$

Des théories bien connues apprennent que les systèmes (k_i, l_i = const. arbitr.)

$$\sum_i k_i \varphi_i(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_i l_i \theta_i(y) = 0$$

sont *homaloïdes*. Voici ce que l'on entend par là : les

$N-1$ équations

$$\sum_j k_{\rho j}\varphi_j(x)=0 \qquad (\rho=1, 2, \ldots, N-1),$$

où les $k_{\rho j}$ sont des constantes arbitraires, jointes à la N-ième équation $x_0=1$, ont une seule solution x : 1° variable avec les $k_{\rho j}$; 2° telle que, pour un choix approprié des $k_{\rho j}$, le point x vienne occuper une position *quelconque* dans l'espace. Les autres solutions sont fixes ou assujetties à rester sur certaines figures de l'espace.

Autrement dit (8°), il y a une seule solution *propre* x.

Dailleurs, la solution mobile x dépend rationnellement des N déterminants $(N-1)$-aires, y fournis par le tableau $[k_{\rho j}]$ à N colonnes et $N-1$ lignes.

Tout cela est bien connu.

58° Une fois qu'on a choisi la substitution ponctuelle

$$\sigma=|z \quad \varphi(z)|, \qquad \sigma^{-1}=|z \quad \theta(z)|,$$

voici comment s'achèvera la construction de la crémonique s.

Reprenons les conditions de contact (26°)

$$A u_j=\sum_i \psi_i\varphi_{ij}, \qquad \mathfrak{A} v_j=\sum_i \eta_i\theta_{ij}.$$

Comme

$$\Phi=|\varphi_{ij}|\neq 0 \qquad \text{et} \qquad \Theta=|\theta_{ij}|\neq 0,$$

on pourra prendre pour ψ_i et η_i les expressions

$$\psi_i=\sum_j u_j\Phi_{ij}, \qquad \eta_i=\sum_j v_j\Theta_{ij},$$

$$\Phi_{ij}=\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_{ij}}, \qquad \Theta_{ij}=\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_{ij}},$$

débarrassées, bien entendu, s'il y avait lieu, de leur p. g. c. d.

ψ_i a pour classe 1 et pour ordre $(m-1)(N-1)$. η_i a

pour classe 1 et pour ordre $(p-1)(N-1)$. Le départ d'un p. g. c. d. abaisse éventuellement l'ordre, mais non la classe.

En effet, si la classe s'abaissait pour ψ_i, ψ_i ne contiendrait plus que les u_i. Le tableau (14°)

$$\nabla = \left\{ \begin{matrix} \varphi & \varphi' \\ \psi & \psi' \\ u & x \end{matrix} \right\} \quad \text{(à 2N colonnes et à 2N + 1 lignes)}$$

ne serait pas correct (20°).

Pour le voir, remarquons que si les u manquent à la fois dans φ_i et ψ_i l'élément (y, v) ne dépend plus des $2N-3$ paramètres λ_α (10° et 20°), mais seulement des $N-1$ premiers d'entre eux, qui définissent le point x, ce qui est absurde.

59° Il viendra ainsi la formule définitive pour la crémonique s

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x) \\ u_i & \sum_j u_j \Phi_{ij} \end{vmatrix}, \qquad s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i(x) \\ u_i & \sum_j u_j \Theta_{ij} \end{vmatrix},$$

$$s = \left(\begin{matrix} m & 0 \\ (m-1)(N-1) & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p & 0 \\ (p-1)(N-1) & 1 \end{matrix} \right).$$

On a vu, de plus, que

$$1 = r_{\varphi'} = r_{\theta'}, \qquad N = r_\varphi = r_\theta.$$

Le tableau $|\psi'|$ contient le déterminant N-aire

$$|\Phi_{ij}| = |\varphi_{ij}|^{N-1} \neq 0.$$

Donc $r_{\psi'} = N$ et, de même, $r_{\eta'} = N$.

Restent encore indéterminées les valeurs de r_ψ et r_η.

60°. La crémonique s qui vient d'être construite n'est pas autre chose que la substitution ponctuelle σ *prolongée*. Ainsi : *toute crémonique s'obtient en combinant la substitution d'échange* (6°) *avec une ponctuelle prolongée.*

La crémonique la plus simple est celle construite au 6°.

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} z & A[z] \\ w & A'^{-1}[z] \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis vient la substitution d'échange (6°),

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} z & w \\ w & z \end{vmatrix}.$$

THÉORÈME. — *Toute crémonienne qui laisse fixe tout point x de l'espace est la crémonienne unité.*

En effet, si $y_i = x_i$, on est ramené au cas du 57°, sauf que la ponctuelle σ se réduit à l'unité. $\varphi_i = x_i$, $\psi_i = u_i$, ...

C. Q. F. D.

61° Reprenons la crémonique s construite au 58° et cherchons-en les variétés primordiales.

$\mathfrak{L}_x$ est évidemment constituée par les ∞^{N-2} éléments adhérents au point y, y étant l'image de x par la ponctuelle σ. Y_x se réduit au point y. V_x est formée par les ∞^{N-2} plans v qui passent par y.

On voit qu'une crémonique est une crémonienne où une variété primordiale se réduit à un point (ou à un plan).

Quelle est $\mathfrak{L}_u$?

Je remarque d'abord que $r_\psi > 1$, c'est-à-dire $r_\psi \geqq 3$ (54°). En effet, si $r_\psi = 1$, on a $n = 0$, les x manquent dans les ψ et l'on a, en vertu des formules du 59°, $\psi_i(u)$ de classe 1. La crémonique est alors la collinéation $\mathcal{A}$ (60°).

Puisque $r_\varphi \geqq 3$, la théorie des Chapitres précédents est applicable pour la construction de $\mathfrak{L}_u$.

Y_u est déterminé par des équations primordiales au nombre de

$$N + 1 - r_\varphi = N + 1 - N = 1.$$

L'équation de Y_u est évidemment

$$F\begin{pmatrix} p & 1 \\ y; & u \end{pmatrix} = \sum u_j \theta_j(y) = 0,$$

conséquence de

$$\sum u x = 0 = \sum u \theta = 0.$$

Par chaque point de Y_u passe (47°) un seul plan tangent v. De ces plans tangents il y aura

$$\infty^{r_\psi - 2}.$$

r_ψ dépend de la nature des θ_i, mais d'une façon détournée.

Par exemple pour $N = 4$, Y_u est une surface, la surface générale du réseau homaloïde

$$\sum_i u_i \theta_i(y) = 0.$$

Si Y_u n'est pas développable, il y a ∞^2 plans tangents v et $r_\psi = 4$. Si Y_u est développable, il n'y a plus que ∞ plans tangents, $r_\psi = 3$.

Maintenant existe-t-il, dans l'espace ordinaire, un réseau homaloïde dont la surface générale soit développable? Je n'en sais rien et le problème paraît très ardu à élucider.

62° Je n'insisterai plus sur les crémoniques. Leur théorie désormais se confond avec celle des substitutions ponctuelles birationnelles.

CHAPITRE VI.

ÉLÉMENTS FONDAMENTAUX.

63° Nommons *fondamental pour la crémonienne* s tout élément dont l'image par s n'est plus unique. Il faudra évidemment avoir

$$\varphi_i = 0, \quad \text{ou} \quad \psi_i = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi_i = \psi_i = 0.$$

Faisons usage des coordonnées non homogènes (10°) μ_β et λ_α ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2N-3$). La crémonienne s est donnée par les relations

$$\mu_\beta = \mathcal{L}_\beta(\lambda) = \frac{L_\beta(\lambda)}{L_0(\lambda)}, \qquad \lambda_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha(\mu) = \frac{M_\alpha(\mu)}{M_0(\mu)},$$

où les L et les M sont des polynomes.

Les éléments fondamentaux de s sont donnés par les $2N-2$ équations $L_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, 2N-3$; les $2N-2$ équations $M_k = 0$ donneront les éléments fondamentaux de s^{-1}.

64° Une attention spéciale est méritée par les éléments fondamentaux (X, u) ou (x, U), où le plan u, ou le point x, est *quelconque* donné.

Théorème. — *Il ne peut exister sur le plan* u (*passer par le point* x) *plus de* ∞^{N-4} *points* X (*plans* U).

Faisons le raisonnement sur les plans U.

Donnons-nous x en fixant, arbitrairement d'ailleurs, les $N-1$ paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}$. Les $N-2$ paramètres $\lambda_N, \ldots, \lambda_{2N-3}$, qui définissent U, sont donnés (63°) par les $2N-2$ équations

$$L_k = 0, \quad k = 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad 2N-3.$$

Sans changer la crémonienne s, il est licite de débarrasser les polynomes L_k de leur p. g. c. d. Je supposerai dorénavant les polynomes L_k, aux $2N-3$ indéterminées λ_α, premiers entre eux. Il est licite aussi, dans la présente discussion, d'effectuer sur les L_k une collinéation $(2N-2)$-aire quelconque, à coefficients constants. Je supposerai, par suite, que la fraction rationnelle $L_\beta : L_0$, aux $2N-3$ indéterminées λ, est irréductible.

S'il existe ∞^{N-3} plans U, on peut choisir arbitrairement les $N-3$ paramètres $\lambda_N, \lambda_{N+1}, \ldots, \lambda_{2N-4}$. Donc les $2N-2$ équations

$$L_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2N-4}, \Lambda) = 0, \qquad \Lambda = \lambda_{2N-3},$$

où il n'y a qu'une seule inconnue Λ et $2N-4$ indéterminées, ont au moins une racine commune. Le résultant

$$\text{Rés.} \begin{pmatrix} L_\beta & L_0 \\ \Lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(notation de König)},$$

obtenu en éliminant l'inconnue Λ entre les deux équations $L_\beta = 0$ et $L_0 = 0$, est zéro. On peut aussi effectuer sur les λ une collinéation préalable $(2N-3)$-aire quelconque, ce qui permettra d'écrire

$$L_k = \Lambda^\varpi + \Lambda^{\varpi-1} G_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2N-4}) + \ldots.$$

Alors, en vertu de ce que le résultant s'évanouit, on a l'identité

$$(o) \qquad A_\beta L_\beta = B_\beta L_0,$$

où A_β et B_β sont des polynomes en λ_α, contenant Λ au degré $\varpi - 1$ au plus (König, p. 101). Comme L_0 est premier avec L_β, l'identité (o) exige que L_0, qui est en Λ du degré ϖ,

divise A_β, qui est en Λ du degré $\varpi - 1$ au plus. Cela est absurde et le théorème est démontré.

Ainsi, parmi les ∞^{N-2} points situés sur un plan quelconque u (les ∞^{N-2} plans passant par un point quelconque x), les points X (plans U), qui forment des éléments fondamentaux (X, u) [éléments fondamentaux (X, u)], constituent une variété à $N - 4$ dimensions *au plus*.

65° A la démonstration précédente il suffit de changer quelques mots à peine pour établir qu'*il n'existe pas plus de* ∞^{2N-5} *éléments fondamentaux*.

En effet, s'il en existait ∞^{2N-4}, on pourrait se donner à volonté $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2N-4}$. Les $2N-2$ équations $L_k = 0$, où les $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2N-4}$ sont des indéterminées, avec l'unique inconnue λ_{2N-3}, auraient une racine, au moins, commune. Cela est absurde, comme on l'a vu (64°).

66° A chaque élément fondamental $\mathcal{F} = (x, u)$ correspond une variété *fondamentale* φ. Nous nommerons ainsi la figure constituée par les différents éléments-images, par la crémonienne s, de l'élément $\mathcal{F}$.

Pour construire φ, reprenons les équations Ω du 8°. La solution *propre* (y, v), pour l'élément (x, u) quelconque, se présente comme la solution commune d'un système $\mathcal{E}$ d'équations (obtenues en opérant sur Ω d'une façon convenable).

Quand (x, u) devient le fondamental $\mathcal{F}$, le système $\mathcal{E}$ ne contient plus assez d'équations *distinctes* pour définir (y, v). (y, v) est alors indéterminé sur une certaine variété algébrique, laquelle sera, par définition, la variété fondamentale φ.

67° On voit que la présente théorie des fondamentaux $\mathcal{F}$ et des fondamentales φ est la généralisation immédiate des propriétés bien connues que possèdent les points fondamentaux, dans les substitutions Cremona (birationnelles, planes ou dans l'espace).

Rappelons brièvement ces propriétés.

Prenons, par exemple, le réseau homaloïde plan, $N = 3$, de degré M

$$\{ i = 1, 2, 3 \} \sum_i k_i f_i(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Deux courbes du réseau

$$\sum kf = 0, \qquad \sum lf = 0,$$

pour un choix *quelconque* des paramètres k_i et l_i, ou des paramètres

$$y_i = \frac{\partial \Delta}{\partial g_i}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix},$$

se coupent en $M^2 - 1$ points fixes : solutions *impropres* du système Ω,

$$\frac{f_1}{y_1} = \frac{f_2}{y_2} = \frac{f_3}{y_3},$$

et en un seul point x,

$$x_i = F_i(y_1, y_2, y_3),$$

solution *propre* de Ω. Alors la substitution Crémona est

$$\sigma = | z \quad f(z) |, \qquad \sigma^{-1} = | z \quad F(z) |.$$

Mais, si x est un point fondamental $\mathfrak{F}$, les deux courbes

$$\sum kf = 0$$

et

$$\sum lf = 0$$

ont une branche commune, laquelle est la courbe fondamentale afférente à $\mathfrak{F}$.

68° Rappelons aussi comment la ponctuelle plane σ transforme les figures du plan.

Nommons $y = \sigma[x]$ le point-image de x par σ ; y aura les f_i pour coordonnées.

Soit C, $\chi(x) = 0$, une courbe que parcourt x. Je nommerai $C' = \sigma[C]$, ou courbe-image de C par σ, le lieu du point y, quand x voyage sur C.

Comme $x = F(y)$, l'équation de C' sera

$$\chi[F_1(y), F_2(y), F_3(y)] = \varpi(y) = 0.$$

Mais, si la courbe C passe par divers fondamentaux $\mathfrak{F}^{(1)}$, $\mathfrak{F}^{(2)}$, ..., alors il se sépare, de la forme ternaire $\varpi(y)$, des facteurs

$$U_1^{\alpha_1}, \quad U_2^{\alpha_2}, \quad \ldots,$$

$U_1 = 0$, $U_2 = 0$, ... étant les courbes fondamentales afférentes à $\mathfrak{F}^{(1)}$, $\mathfrak{F}^{(2)}$, ... La courbe-image sera ce qui reste de la courbe $\varpi(y) = 0$ quand on a supprimé ces branches, courbes fondamentales.

Tout cela est bien connu, mais va être généralisé en matière de crémonienne.

On peut résumer la théorie précédente en disant ceci : *la courbe-image de la courbe* C *est le lieu du point-image* y de x, *lorsque* x *parcourt* C, *tout en restant à distance finie des fondamentaux situés sur* C.

Revenons maintenant aux crémoniennes générales.

69° Nommons Z la figure constituée par des éléments (x, u), en nombre fini ou infini. Je nommerai $Z' = s[Z]$ la figure, lieu des éléments $(y, v) = s[(x, u)]$, images, par la crémonienne s, des éléments (x, u).

Désignons par

$\mathfrak{F}$ un élément fondamental pour s,
$\mathfrak{F}'$ » » » s^{-1},
$\mathfrak{V}$ une variété fondamentale pour s,
$\mathfrak{V}'$ » » » s^{-1}.

Je vais supposer que Z est une variété algébrique. Quelle est $Z' = s[z]$?

Par analogie avec les substitutions ponctuelles planes (68°), *ne pourront faire partie* de Z' les variétés $\mathfrak{V}$ ou portions de $\mathfrak{V}$.

70° D'après cela, si Z est constituée exclusivement par des éléments $\mathfrak{F}$, l'image de Z *n'existera pas*, comme étant formée exclusivement de variétés $\mathfrak{V}$.

Si Z, ou une portion de Z, est une variété $\mathfrak{V}'$, l'image correspondante se réduit au fondamental $\mathfrak{F}'$, correspondant dans s^{-1} à la variété $\mathfrak{V}'$.

Examinons enfin ce qui se passe quand Z est une variété ordinaire, donnée par des équations

$$(1) \quad F_1(x; u) = 0, \qquad F_2(x; u) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_g(x; u) = 0,$$

où les F sont des formes mixtes.

En vertu des relations

$$\theta_0 x_i = \theta_i(y; v), \qquad \eta_0 u_i = \eta_i(y; v),$$

les formes mixtes annulées

$$(2) \quad G_1(y; v) = F_1(\theta; \eta) = 0, \qquad G_2(y; v) = F_2(\theta; \eta) = 0, \qquad \ldots$$

donneront une variété, laquelle sera Z', après suppression des variétés $\mathfrak{V}$, s'il y avait lieu. Cette suppression serait nécessaire, si Z contenait des éléments fondamentaux $\mathfrak{F}$.

71° Supposons en particulier que Z soit la variété formée par les ∞^{N-2} éléments $(x, \underline{u})$, où le plan u est fixe, mais quelconque. Il y aura éventuellement sur Z des éléments fondamentaux $\mathfrak{F}$, s'il existe des points X, tels qu'ils ont été étudiés plus haut (64°). La variété Z', telle qu'elle vient d'être définie, c'est-à-dire après suppression éventuelle des variétés $\mathfrak{V}$, se nommera *la variété primordiale* $\mathfrak{P}_u$.

Cette définition est bien d'accord avec celle des Chapitres précédents.

C'est ce qu'il est facile de voir.

72° Par exemple, pour construire la variété ponctuelle Y_u, qui entre dans la constitution de $\mathfrak{P}_u$, on a supposé x *indéterminé* ou quelconque sur le plan u [c'est-à-dire que x n'est

pas un point X (64°)] et l'on a établi (33°) les relations

$$(0)\qquad \begin{cases} \Phi_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_R; \varphi_s, u) = 0, \\ R = r_\varphi - 1; \qquad r_\varphi \leqq s \leqq N. \end{cases}$$

De même, pour la variété planaire V_u viendraient les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} \Psi_t(\psi_1, \ldots, \psi_S; \psi_s; u) = 0, \\ S = r_\psi - 1; \qquad r_\psi \leqq s \leqq N. \end{cases}$$

Mais, si x, au lieu d'être quelconque, vient en un point X, alors :

Ou bien $\varphi_i = 0$, et les relations (0) deviennent illusoires;
Ou bien $\psi_i = 0$, et les relations (1) deviennent illusoires;
Ou bien $\varphi_i = \psi_i = 0$, et (0) et (1) sont tous les deux illusoires.

73° Par conséquent, soit dans les conventions du présent Chapitre, soit dans les conventions des Chapitres précédents : *la primordiale $\mathfrak{P}_u$ est la figure parcourue par l'élément*

$$(y, v) = s[(x, u)],$$

quand le point x parcourt le plan u, mais sans venir en un point X. Autrement dit : *l'élément (x, u) ne vient pas en un élément fondamental $\mathfrak{F}$.*

74° Nous sommes maintenant à même de démontrer une importante proposition (Belge, 35°).

Théorème. — *Soit une variété intégrale* (10°, des Générilités) *donnée $\mathfrak{P}$. S'il existe une crémonienne s admettant $\mathfrak{P}$ pour primordiale, la crémonienne s sera unique.*

Soient s et s' admettant la même primordiale $\mathfrak{P}_x$, pour x quelconque. Je dis que s' n'est pas distincte de s.

La démonstration, pour N quelconque, a la même marche que pour $N = 4$ (Belge, 35°).

Lemme I. — *Toute crémonienne qui laisse fixe un point (ou un plan) quelconque, se réduit à la crémonienne unité.*

La démonstration a été donnée au 60° ci-dessus.

Lemme II. — *Si l'on transforme tout l'espace par la crémonienne t, la crémonienne s devient $t^{-1}st$.*

En effet, on a

$$(y, v) = s[(x, u)].$$

Transformons par t, il viendra (5°)

$$t[(y, v)] = st[(x, u)],$$
$$(y, v) = t^{-1}st[(x, u)]. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Lemme III. — *Si la crémonienne t laisse fixe, pour x quelconque, la primordiale donnée $\mathfrak{P}_x$, t se réduit à l'unité.*

Transformons tout l'espace par la crémonienne s^{-1}. Les

$$\infty^{N-2}$$

éléments de $\mathfrak{P}_x$ deviennent les ∞^{N-2} éléments adhérents à x. t laissant $\mathfrak{P}_x$ fixe, sts^{-1}, en vertu du Lemme II, permute entre eux les éléments adhérents à x et laisse x fixe. Donc (lemme I)

$$sts^{-1} = 1, \qquad t = 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème.

Si s' et s ont la même primordiale $\mathfrak{P}_x$, prenons sur $\mathfrak{P}_x$ un élément (y, v) quelconque.

L'élément $s'^{-1}[(y, v)]$ adhère à x et $s'^{-1}s[(y, v)]$ est sur $\mathfrak{P}_x$. La crémonienne $s'^{-1}s$ ne fait qu'échanger entre eux les éléments de $\mathfrak{P}_x$ et laisse $\mathfrak{P}_x$ fixe. Alors (lemme III)

$$s'^{-1}s = 1 \quad \text{et} \quad s' = s. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

75° On peut, grâce au théorème, prendre pour base de la

construction, pour les crémoniennes, les variétés primordiales. On se trouve en présence du problème que voici :

Étant donnée une variété intégrale $\mathfrak{W}$, *lieu d'un élément* (y, v), *variété dépendant du point* x, *trouver les conditions* J *nécessaires et suffisantes pour que* $\mathfrak{W}$ *soit la primordiale* $\mathfrak{P}_x$ *d'une crémonienne* s.

Les conditions J *étant supposées satisfaites, construire* s, qu'on sait être unique (74°).

Ce problème fera l'objet d'un travail ultérieur, généralisation des Chapitres VII à XI de mon Mémoire pour $N = 4$ (Belge, Troisième Partie).

TABLE DES MATIÈRES.


19 AUG. 1905
NATURAL HISTORY

Librairie A. FONTEMOING, 4, rue Le Goff.

Onomasticon Taciteum, par Ph. Fabia, professeur de Philologie classique à la Faculté des Lettres de l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 4)* . **15** fr.

L'« Agamemnon » d'Eschyle, texte, traduction et commentaires, par Paul Regnaud, professeur à l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 6)* . . . . **6** fr.

Notes critiques sur quelques Traductions allemandes de poèmes français au moyen âge, par J. Firmery, professeur de Littérature étrangère à l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 8)* . . . . **5** fr.

Au musée de l'Acropole d'Athènes. — *Études sur la sculpture en Attique avant la ruine de l'Acropole lors de l'invasion de Xerxès*, par Henri Lechat, ancien membre de l'Ecole d'Athenes, chargé de cours à l'Université de Lyon, avec 47 figures dans le texte et 3 planches hors texte (II, *Fasc. 10)* . . . . **8** fr.

Cultes militaires de Rome. Les Enseignes, par Ch. Renel, professeur adjoint à la Faculte des Lettres de Lyon, avec 61 gravures dans le texte. (II, *Fasc. 12)* . . . . **7** fr. **50**

Librairie Ernest LEROUX, 28, rue Bonaparte.

Phonétique historique et comparée du sanscrit et du zend, par P. Regnaud, professeur à la Faculté des Lettres. *(Fasc. 19)* . . . . **5** fr.

L'évolution d'un Mythe. Açvins et Dioscures, par Charles Renel, maître de conférences à la Faculté des Lettres de Besançon. *(Fasc. 24)* . . **6** fr.

Études védiques et post védiques, par Paul Regnaud, professeur de sanscrit et de grammaire comparée à l'Université de Lyon. *(Fasc. 38)* . . **7** fr. **50**

Bhāratīya-Nātya-Çāstram, Traité de Bharata sur le théâtre, texte sanscrit, avec les variantes tirées de quatre manuscrits, une table analytique et des notes par Joanny Grosset, ancien boursier d'études près la Faculté des Lettres *(Fasc. 40)*. **15** fr.

Recherches sur l'Origine de l'Idée de Dieu, d'après le Rig-Véda, par A. Guérinot, docteur ès lettres. (II, *Fasc. 3)* . . . . **7** fr. **50**

Librairie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré, par Léon Autonne, ingénieur des Ponts et Chaussées, chargé de cours à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 6)* **9** fr.

Recherches sur l'équation personnelle dans les observations astronomiques de passages, par F. Gonnessiat, aide-Astronome à l'Observatoire, chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 7)* . . . . **5** fr.

Recherches sur quelques dérivés surchlorés du phénol et du benzène, par Etienne Barral, prof. agrégé à la Faculté de médecine. *(Fasc. 17)* **5** fr.

Sur la représentation des courbes gauches algébriques, par L. Autonne, ingénieur des Ponts et Chaussées, maître de conférences à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 20)* . . . . **3** fr.

Sur le résidu électrique des condensateurs, par L. Houllevigue, maître de confér. à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 32)*. . . . . **3** fr.

Synthèse d'aldéhydes et d'acétones dans la série du naphtalène au moyen du chlorure d'aluminium, par L. Rousset, docteur ès sciences, chef des trav. de chimie génér. à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 30)* . . . . **3** fr.

Recherches expérimentales sur quelques actinomètres électro-chimiques, par H. Rigollot, docteur ès sciences, chef des travaux de physique à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 29)*. . . **5** fr

De la constitution des alcaloïdes végétaux, par X. Causse, docteur ès sciences, chef des Travaux de Chimie organique à la Faculté de Médecine de l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 2)* . . **3** fr.

Etude sur les occultations d'amas d'étoiles par la lune, avec un catalogue normal des pléiades, par Joanny Lagrula, docteur ès sciences, préparateur d'astronomie à la Faculté des Sciences de Lyon. (I, *Fasc. 5)* . . . . **5** fr.

Sur les combinaisons organomagnésiennes mixtes et leur application à des synthèses d'acides, d'alcools et d'hydrocarbures, par Victor Grignard, docteur ès sciences. (I, *Fasc. 6)* . . **3** fr. **50**

Sur la décomposition d'une substitution linéaire, réelle et orthogonale en un produit d'inversions, par Léon Autonne, ingénieur des Ponts et Chaussées, maître de conférences de mathématiques à l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 12)* . . . . **6** fr.

Quelques considérations sur les groupes d'ordre fini et les groupes finis continus, par Le Vavasseur, maître de conférences de mathematiques à la Faculté des Sciences de l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 15)* . . . . **5** fr.

Sur les Formes mixtes, par Léon Autonne, Ingénieur des Ponts et chaussées, Maître de Conférences de Mathématiques à la Faculté des Sciences de l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 16)*. . **8** fr.

Librairie J.-B. BAILLIÈRE et Fils, 19, rue Hautefeuille.

Recherches anatomiques et expérimentales sur la métamorphose des Amphibiens anoures, par E. Bataillon, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Dijon, avec 6 pl. hors texte. *(Fasc. 2)* . . . . **4** fr.

Anatomie et Physiologie comparées de la Pholade dactyle. Structure, locomotion, tact, olfaction, gustation, action dermatoptique, photogénie, avec une théorie générale des sensations, par le Dr Raphaël Dubois, professeur à la Faculté des Sciences. 68 fig. dans le texte et 15 pl. hors texte. *(Fasc. 3)* . . . . **18** fr.

Sur le pneumogastrique des oiseaux, par E. Couvreur, docteur ès sciences, chef des travaux de physiologie à la Faculté des Sciences, avec 3 pl. hors texte et 40 fig. dans le texte *(Fasc. 4)*. **4** fr.

Recherches sur la valeur morphologique des appendices superstaminaux de la fleur des Aristoloches, par Mlle A. Mayoux, élève de la Faculté des Sciences, avec 3 pl. hors texte. *(Fasc. 5)*. **4** fr.

Etude stratigraphique sur le Jurassique inférieur du Jura méridional, par Attale Riche, docteur ès sciences, chef des travaux de geologie, 2 pl hors texte. *(Fasc. 10)*. . . . . **12** fr.

Etude expérimentale sur les propriétés attribuées à la tuberculine de M. Koch, faite au laboratoire de médecine expérimentale et comparée de la Faculté de Médecine, par M. le professeur ARLOING, M. le Dr RODET, agrégé, et M. le Dr COURMONT, agrégé, avec 4 planches en couleurs. *(Fasc. 11)* . . . . **10 fr.**

Histologie comparée des Ebénacées dans ses rapports avec la Morphologie et l'histoire généalogique de ces plantes, par Paul PARMENTIER, professeur de l'Université, avec 4 planches hors texte. *(Fasc. 12)* . . . . **4 fr.**

Recherches sur la production et la localisation du Tanin chez les fruits comestibles fournis par la famille des Pomacées, par Mlle A. MAYOUX, élève de la Faculté des Sciences, 2 planches hors texte. *(Fasc. 13)* . . . . **3 fr.**

Etude sur le Bilharzia hæmatobia et la Bilharziose, par M. LORTET, doyen de la Faculté de médecine, et M. VIALLETON, professeur à la Faculté de médecine de l'Université de Montpellier, 8 planches hors texte et 8 figures dans le texte. *(Fasc. 16)* . . . . **10 fr.**

Monographie de la Faune lacustre de l'Eocène moyen, par Frédéric ROMAN, docteur ès sciences, préparat. de géologie à l'Université de Lyon, avec 3 fig. et 3 pl. hors texte. (I, *Fasc. 1er*) . **5 fr.**

Etudes sur le Polymorphisme des Champignons, influence du milieu, par Jean BEAUVERIE, docteur ès sciences, prépar. de botan. Faculté des Sciences de Lyon, avec 75 gr. dans le texte. (I, *Fasc. 3*). **7 fr. 50**

L'Homme quaternaire dans le Bassin du Rhône, *Etude géologique et anthropologique*, par Ernest CHANTRE, docteur ès sciences, sous-directeur du Muséum, avec 74 figures dans le texte (I, *Fasc. 4*) . . . . **6 fr.**

La Botanique à Lyon avant la Révolution et l'histoire du Jardin botanique municipal de cette ville, par M. GÉRARD, professeur à la Faculté des Sciences, avec 9 fig. dans le texte et 1 pl. hors texte. *(Fasc. 23)* . . . . **3 fr. 50**

Physiologie comparée de la Marmotte, par le Dr Raphaël DUBOIS, professeur à la Faculté des Sciences, avec 119 figures et 125 planches hors texte, *(Fasc. 25)*. . . . . **15 fr.**

Etudes sur les terrains tertiaires du Dauphiné, de la Savoie, et de la Suisse occidentale, par H. DOUXAMI, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Lyon, avec 6 planches hors texte et 31 figures. *(Fasc. 27)* . . . . **6 fr.**

Recherches physiologiques sur l'appareil respiratoire des oiseaux, par J.-M. SOUM, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Bordeaux, avec 40 figures dans le texte. *(Fasc. 28)* . . . . . **3 fr. 50**

Résultats scientifiques de la campagne du « Caudan » dans le golfe de Gascogne (août-septembre 1895), par R. KŒHLER, professeur de zoologie à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 26)*.
Fascicule I. 1 vol. in-8° avec 6 pl. . . . . **6 fr.**
Fascicule II. 1 vol. in-8° avec 11 pl. . . . **6 fr.**
Fascicule III. 1 vol. in-8° avec 21 pl. . . . **20 fr.**

Anatomie pathologique du système lymphatique dans la sphère des néoplasmes malins, par le Dr C. REGAUD, chef des travaux, et le Dr F. BARJON, préparateur d'anatomie générale et d'histologie à la Faculté de médecine (Mémoire couronné par l'Académie de médecine), avec 4 pl. hors texte. *(Fasc. 33)* . . . . **5 fr.**

Recherches stratigraphiques et paléontologiques dans le Bas-Languedoc, par Frédéric ROMAN, docteur ès sciences, préparateur de géologie à la Faculté, avec 40 figures dans le texte et 9 planches hors texte. *(Fasc. 34)*. . . . . . **8 fr.**

Étude du champ électrique de l'atmosphère, par Georges LE CADET, docteur ès sciences, assistant à l'Observatoire de Lyon, 3 fig. et 10 pl. dans le texte. *(Fasc. 35)* . . . . **6 fr.**

Les formes épitoques et l'Évolution des Cirratuliens par Maurice CAULLERY, maître de confér. à la Faculté des Sciences, et Félix MESNIL, chef de Laboratoire à l'Institut Pasteur, 6 pl. hors texte. *(Fasc. 39)*. . . . . **7 fr. 50**

Etude géologique et paléontologique du Carbonifère inférieur du Mâconnais, par A. VAFFIER, docteur en médecine et docteur ès sciences, avec 11 figures et 12 planches hors texte. (I, *Fasc. 7*). . **8 fr.**

Contributions à l'Embryologie des Nématodes, par A. CONTE, docteur ès sciences, prépar. de Zoologie à l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 8*). **5 fr.**

Contributions à l'étude des larves et des métamorphoses des diptères, par C. VANEY, docteur ès sciences, agrégé des sciences naturelles, chef des travaux de Zoologie à l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 9*) . . . . **6 fr.**

Contribution à l'étude de la classe des Nymphéinées, par J.-B.-J. CHIFFLOT, docteur ès sciences naturelles, licencié ès sciences physiques, chef des Travaux de Botanique à la Faculté des sciences, sous-directeur du Jardin botanique de la Ville, avec 214 figures intercalées dans le texte. (I, *Fasc. 10*) . . . . **7 fr. 50**

Monographie géologique et paléontologique des Corbières orientales, par Louis DONCIEUX, docteur ès sciences, Collaborateur auxiliaire au service de la carte géologique de France, avec 69 figures dans le texte, 7 planches hors texte et une carte géologique. (I, *Fasc. 11*) . . . . **8 fr.**

Contribution à l'étude des composés diazoamidés, par Louis MEUNIER, docteur ès sciences, chef des travaux de chimie à la Faculté des sciences de l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 13*) . . . . **5 fr**

Etude stratigraphique et paléontologique sur la Zone à Lioceras concavum du Mont d'Or lyonnais, par Attale RICHE, docteur ès sciences, chargé d'un cours complémentaire de Géologie à la Faculté des sciences de l'Université de Lyon, avec 7 figures dans le texte et 11 planches hors texte (I, *Fasc. 14*) . . . . **7 fr. 50**

Lyon. — Imprimerie A. REY, 4, rue Gentil. — 38237



